This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

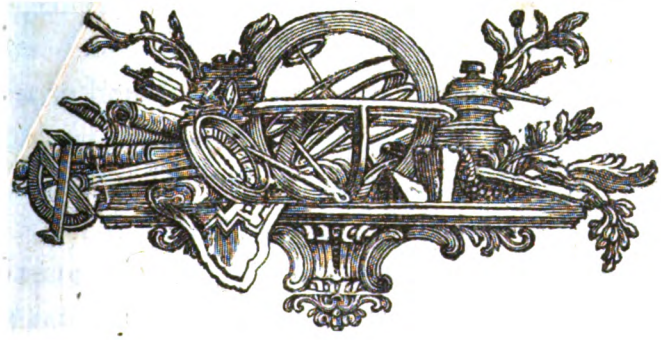
PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

TREIZIÈME CAHIER.

TOME VI.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

Avril 1806.

12 6

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Digitized by Google

JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MÜNCHEN

MÉMOIRE

Sur la Surface courbe, dont toutes les Normales sont tangentes à une même Surface développable quelconque.

Par M. G. MONGE.

PRÉLIMINAIRES.

I.

On sait que toutes les normales d'une surface courbe sont en même temps tangentes à deux autres surfaces, dont la première est le lieu des centres d'une des courbures de la surface primitive, et dont la seconde est le lieu des centres de l'autre courbure. En général, les deux surfaces des centres de courbures sont les nappes distinctes d'une même surface courbe ; elles sont exprimées par une même équation d'un degré pair, et dont les radicaux ont des signes différens pour l'une et pour l'autre. Cependant, pour certains cas particuliers dont le nombre est encore infiniment grand, les équations des deux nappes de la surface des centres de courbures sont séparées ; elles ne sont pas de nature à s'échanger l'une en l'autre dans aucune hypothèse ; et l'une de ces surfaces peut être entièrement construite sans qu'on ait déterminé un seul point de l'autre ; mais, même alors, il existe entre ces deux surfaces une relation dont nous allons nous occuper.

Digitized by Google

Par exemple, pour une surface quelconque de révolution, le lieu des centres de la courbure dans le sens des parallèles se réduit à une ligne droite qui est l'axe de révolution; les équations de cette droite sont absolues, et n'ont aucun rapport avec l'équation du lieu des centres de la courbure dans le sens des méridiens; mais, par cela seul que cette première nappe est une ligne droite, la seconde est assujettie à certaines conditions : elle est elle-même une autre surface de révolution autour du même axe; et l'on voit aisément que le méridien de cette nouvelle surface de révolution est la développée du méridien de la première.

Ainsi, deux surfaces ne peuvent pas être prises arbitrairement pour être les deux nappes du lieu des centres de courbure d'une troisième surface. De ces deux nappes une seule peut être prise arbitrairement; et celle-ci étant donnée, l'autre s'ensuit nécessairement : ce qui donne lieu au problème suivant, que nous allons d'abord résoudre.

II.

Une surface courbe quelconque donnée étant regardée comme le lieu des centres d'une des courbures d'une autre surface, trouver l'équation du lieu des centres de l'autre courbure ?

La normale devant toucher les deux surfaces des centres de courbure, soient x', y', z' les coordonnées de son point de contact avec la première, et x'', y'', z'' celles de son point de contact avec la seconde. De plus, soient

$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy'$$

l'équation différentielle de la première surface des centres, et

$$dz'' = p''\,dx'' + q''\,dy''$$

celle de la seconde surface; il est clair que p', q' seront des fonctions de x' et y', et que p'', q'' seront des fonctions de x'', y''.

Cela posé, si par le point de contact de la normale avec la première surface des centres, et dont les coordonnées sont x', y', z', on mène un plan tangent à cette surface, l'équation de ce plan en x, y, z sera

$$z - z' = p'(x - x') + q'(y - y').$$

Mais ce plan contient la normale, et passe par conséquent par le

Digitized by Google

point de contact de cette droite avec l'autre surface des centres, point dont les coordonnées sont x'', y'', z''; donc l'équation de ce plan aura lieu entre les trois coordonnées du second point de contact; et l'on aura

$$z'' - z' = p'(x'' - x') + q'(y'' - y');$$

de même, si par le point de contact de la normale avec la seconde surface des centres, et dont les coordonnées sont x'', y'', z'', on mène un plan tangent à cette surface, l'équation de ce plan en x, y, z sera

$$z - z'' = p''(x - x'') + q''(y - y''),$$

et, parce que ce second plan contient encore la normale, et passe par conséquent par le point de contact de la normale avec la première surface des centres, point dont les coordonnées sont x', y', z', il s'ensuit que l'équation du plan doit avoir lieu entre ces trois dernières coordonnées; donc on aura

$$z'' - z' = p''(x'' - x') + q''(y'' - y').$$

De plus, par la propriété des courbures des surfaces courbes, les deux plans tangens que nous venons de considérer, et qui passent par la même normale, sont rectangulaires entre eux; donc les coëfficiens de leurs équations auront entre eux la relation suivante:

$$p'p'' + q'q'' + 1 = 0.$$

On aura donc entre les coordonnées des deux surfaces des centres de courbure, les trois équations que nous réunissons ici,

$$z'' - z' = p'(x'' - x') + q'(y'' - y')$$
$$z'' - z' = p''(x'' - x') + q''(y'' - y')$$
$$p'p'' + q'q'' + 1 = 0.$$

Actuellement, si l'une des surfaces des centres est donnée, celle, par exemple, dont les coordonnées sont x', y', z', on aura entre ces trois coordonnées une équation que nous pourrons représenter par

$$F(x', y', z') = 0,$$

et de laquelle on tirera par la différenciation les valeurs de p' et q' en x', y', z'. Ces valeurs étant substituées, si des quatre équations on élimine les trois quantités x', y', z', on aura en x'', y'', z'', p'', q'' une équation aux

Digitized by Google

différences partielles du premier ordre, qui sera celle de la seconde surface des centres demandée.

Appliquons ce résultat à un cas particulier simple et connu.

III.

Supposons que la première surface des centres de courbure se réduise à une ligne droite qui se confonde avec l'axe des z, ce qui est, comme on sait, le cas d'une surface quelconque de révolution autour de cet axe, et qu'il faille trouver l'équation de l'autre surface des centres, on aura, pour la première surface, les deux équations $x' = 0$, $y' = 0$, ce qui donne $p' = \infty$, $q' = \infty$; substituant dans les trois équations ci-dessus, elles se réduiront aux deux suivantes:

$$p' x'' + q' y'' = 0$$
$$p' p'' + q' q'' = 0,$$

entre lesquelles éliminant p', q', seules quantités qui contiennent encore x', y', on aura

$$p'' y'' - q'' x'' = 0,$$

équation aux différences partielles du premier ordre, qui appartient à une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z, et qui d'ailleurs ne statue rien sur la nature du méridien de cette surface, qui est par conséquent arbitraire.

Donc, lorsque l'une des surfaces des centres se réduit à une droite, l'autre surface des centres est de révolution autour de cette droite considérée comme axe.

IV.

Passons maintenant à un autre cas particulier relatif à l'objet du mémoire qui suit, et supposons que la première surface des centres soit une surface développable quelconque; l'équation de cette surface sera, comme on sait, le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux équations suivantes:

$$z' = x' \Phi \alpha + y' \Psi \alpha + \alpha$$
$$0 = x' \Phi' \alpha + y' \Psi' \alpha + 1,$$

Digitized by Google

dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant α comme seule variable, et dans lesquelles les fonctions Φ et Ψ sont arbitraires.

En différenciant, on aura $p' = \Phi\alpha$, $q' = \Psi\alpha$; et substituant pour z', p', q' leurs valeurs dans les équations ci-dessus, on trouvera

$$z'' = x''\Phi\alpha + y''\Psi\alpha + \alpha$$
$$0 = p''\Phi\alpha + q''\Psi\alpha + 1.$$

En sorte que l'équation de la seconde surface des centres est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations précédentes, élimination qui ne peut s'effectuer que lorsque les fonctions Φ et Ψ sont déterminées. Cette équation se présente sous la forme d'une différentielle partielle du premier ordre, et l'est en effet quand les formes des deux fonctions sont déterminées; mais si ces fonctions sont regardées comme arbitraires, ce qui a lieu lorsque la première surface des centres est considérée comme une surface développable quelconque, l'équation de la seconde surface des centres, pour ne plus rien contenir d'arbitraire, et être délivrée de toutes les fonctions, doit être portée aux différences partielles du troisième ordre. Nous aurons bientôt occasion de voir que cette surface n'est autre chose que celle qui va faire l'objet de ce mémoire.

Ces préliminaires étant posés, nous allons nous occuper de la surface dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque.

Générations de la Surface.

V.

Première génération. Une surface courbe étant telle que toutes ses normales soient tangentes à une même surface développable, concevons un premier plan quelconque tangent à la surface développable, et qui la touchera par conséquent en une droite; ce plan coupera la surface proposée dans une courbe pour chaque point de laquelle la normale à la surface sera dans le plan; il sera donc lui-même normal à la surface dans chacun des points de son intersection avec elle; de la même manière

Digitized by Google

que le plan d'un méridien quelconque d'une surface de révolution est normal à cette surface dans chacun des points de la courbe du méridien. Concevons ensuite un second plan tangent à la surface développable, infiniment voisin du premier, et qui coupera le premier dans la droite de son contact avec la surface développable ; ce second plan tangent coupera la surface proposée dans une nouvelle courbe, et sera lui-même normal à la surface dans tous les points de cette intersection. L'élément de la surface proposée compris entre ces deux intersections consécutives, et qui sera par-tout perpendiculaire en même temps aux deux plans qui les produisent, pourra donc être regardé comme le fuseau indéfini d'une surface de révolution compris entre ces deux plans considérés comme méridiens consécutifs, et dont l'axe de rotation sera la droite d'intersection de ces deux plans. Cet élément pourra donc être regardé comme engendré par le commencement de rotation de l'intersection de la surface par le premier plan autour de la droite de son intersection avec le second ; et par conséquent la courbe génératrice viendra s'appliquer sur l'intersection de la surface du second plan, et se confondre avec elle.

Concevons encore un troisième plan tangent à la surface développable, et infiniment voisin du second ; il coupera le second plan dans une autre droite infiniment voisine de la première, et qui, comme elle, sera sur la surface développable. Ce troisième plan sera aussi normal à la surface dans tous les points de son intersection avec elle ; l'élément de la surface compris entre cette troisième intersection et la seconde, pourra aussi être regardé comme engendré par le commencement de la rotation de la seconde autour de la seconde droite ; et dans ce mouvement, la seconde intersection vient s'appliquer sur la troisième et se confondre avec elle.

En continuant de considérer ainsi la suite des plans consécutivement tangens à la surface développable, et qui touchent cette surface dans les droites consécutives dont elle est le lieu général, on voit que chacun de ces plans produit une section sur la surface proposée, et que ces sections sont telles, que si la première se meut d'abord en tournant

Digitized by Google

autour de la droite de son plan avec la surface développable, et qu'elle continue à se mouvoir en tournant toujours autour de la droite variable du contact de son plan actuel, elle viendra successivement s'appliquer sur toutes les autres et se confondre entièrement avec chacune d'elles.

Il suit de là que la surface proposée peut être regardée comme engendrée par le mouvement d'une courbe plane arbitraire, constante de forme et de grandeur, et dont le plan roule sans glisser sur une surface développable quelconque.

VI.

Quelle que soit la nature de la surface développable sur laquelle roule le plan de la génératrice, et quelle que soit la nature de la génératrice elle-même considérée dans son plan, la surface engendrée a plusieurs propriétés générales indépendantes de ces particularités. L'énoncé de chacune de ces propriétés générales peut être regardé comme une définition complète et suffisante de la surface; et toutes ces propriétés sont exprimées dans une seule équation, ou peuvent en être déduites par les règles de l'analyse. Nous allons d'abord nous occuper de celles de ces propriétés générales qui se déduisent le plus facilement de la génération que nous venons de trouver.

VII.

Par chacun des points d'une surface courbe quelconque passent toujours deux lignes de courbure qui se coupent à angles droits sur la surface; et chacune de ces deux lignes est telle, que si par tous ses points on mène des normales à la surface, ces normales se rencontrent consécutivement deux à deux, c'est-à-dire, sont toutes tangentes à une même courbe qui, en général, est à double courbure, et réciproquement. Or, si considérant la génératrice de la proposée dans une position quelconque, on mène par tous ses points des normales à la surface, ces droites, qui seront aussi normales à la génératrice, seront toutes dans le plan générateur; elles se rencontreront donc consécutivement deux à deux, et elles

Digitized by Google

seront toutes tangentes à une même courbe qui, dans ce cas, sera la développée plane de la génératrice.

Il suit de là, 1.° que la génératrice, dans toutes ses positions, est la ligne d'une des courbures de la surface engendrée; 2.° que cette ligne de courbure est toujours plane. Mais un plan ne peut être susceptible d'une seule série de positions, et être mobile d'une manière plus générale que de rouler sur une surface développable quelconque; donc il n'y a point d'autre surface qui jouisse de la même propriété; donc la surface engendrée est définie d'une manière complète lorsque l'on énonce qu'une de ses lignes de courbure est constamment plane.

La courbe parcourue par chacun des points de la génératrice est perpétuellement normale au plan générateur; elle est donc aussi perpétuellement normale à la génératrice, et par conséquent aux lignes d'une des courbures; donc elle est une des lignes de l'autre courbure.

VIII.

Il est bien évident que la surface développable touchée par toutes les normales, ou sur laquelle roule le plan générateur, est la surface des centres d'une des courbures; mais nous venons de voir qu'en considérant le plan générateur dans une position quelconque, toutes les normales à la surface qu'il contient sont tangentes à la développée plane de la génératrice: cette développée est donc sur la surface des centres de l'autre courbure; surface qui est le lieu de toutes les développées qui conviennent aux positions différentes et successives du plan générateur. Or, la génératrice est constante de forme et de position dans son plan mobile; sa développée est par conséquent aussi constante de forme et de position dans le même plan; donc en même temps que la génératrice engendre la surface proposée, sa développée constante engendre la surface des centres de la seconde courbure.

La surface proposée est donc définie d'une manière complète lorsque l'on dit que la surface des centres de l'une de ses courbures est engendrée par le mouvement d'une courbe plane constante de forme, dont le plan, sans

Digitized by Google

sans glisser, roule sur une surface développable quelconque, ou lorsque l'on dit que la surface des centres d'une de ses courbures a toutes ses normales tangentes à la même surface développable.

IX.

La surface proposée peut avoir des lignes singulières ou des points singuliers qui dépendent et de la surface développable sur laquelle roule le plan générateur, et de la nature même de la génératrice; mais, indépendamment de ces particularités, elle a une arête de rebroussement nécessaire qui est une suite de sa génération. En effet, concevons que le plan générateur roule sur la surface jusqu'à ce que la génératrice se soit entièrement appliquée sur elle, et que les points dans lesquels se fait cette application laissent leurs traces sur la surface développable; on aura sur cette surface une courbe à double courbure qui sera en même temps sur la surface engendrée. Cela posé, considérons un point quelconque de la génératrice; ce point décrit une courbe qui d'abord s'approche de plus en plus de la surface développable, à laquelle elle devient perpendiculaire au moment où le point décrivant s'applique sur cette surface. Le point décrivant ne pouvant pas pénétrer au-delà de la surface développable, se réfléchit; la nouvelle branche de la courbe qu'il parcourt commence par être encore normale à la surface développable, dont elle s'éloigne ensuite de plus en plus. La ligne de seconde courbure qu'il parcourt a donc un point de rebroussement placé sur la surface développable en un des points de la trace de la génératrice. La même chose ayant lieu pour toutes les autres lignes de seconde courbure, il s'ensuit que la surface engendrée a une arête de rebroussement; que cette arête est la trace même de la génératrice sur la surface développable; qu'elle est perpétuellement touchée par la génératrice; et qu'elle est par conséquent le lieu de l'intégrale particulière de toutes les lignes de courbure planes.

X.

Si l'on suppose que le plan générateur continue de rouler sur la surface

Digitized by Google

développable jusqu'à ce que la développée de la génératrice s'y soit aussi entièrement appliquée, et que cette développée y ait aussi laissé sa trace, on aura sur la surface développable une nouvelle courbe à double courbure, qui sera évidemment une arête de rebroussement pour la surface des centres de la seconde courbure. Cette arête se trouvant en même temps sur les deux surfaces des centres, chacun de ses points sera un centre commun aux deux courbures. Donc si l'on conçoit toutes les tangentes possibles à cette arête, chacune de ses droites sera normale à la surface engendrée, et la coupera en un point pour lequel les deux courbures de la surface seront égales entre elles et dans le même sens. Donc la courbe qui passera par tous ces points sera sur la surface une ligne singulière; ce sera celle de ses courbes sphériques.

XI.

La surface engendrée jouit généralement de la propriété exprimée par la règle de Guldin; car si l'on suppose qu'un arc fini et constant de la génératrice soit entraîné par le plan générateur et parcoure une zone finie sur la surface, cette zone finie pourra être considérée comme divisée par les positions consécutives de la génératrice en fuseaux infiniment étroits de surfaces de révolution; l'aire de chacun de ces fuseaux sera égale à l'arc multiplié par le chemin que parcourt le centre de gravité de cet arc; donc l'aire de la zone entière sera égale à cet arc, facteur commun, multiplié par la somme des espaces parcourus par le centre de gravité.

On reconnaît de même que si l'on circonscrit sur le plan générateur un espace par une courbe quelconque continue ou discontinue, mais rentrante en elle-même, la solidité du volume parcouru par cet espace est égale au produit de l'aire de l'espace multiplié par l'arc que parcourt le centre de gravité de l'aire.

XII.

Si la génératrice est une droite fixe dans le plan et mobile avec lui, la surface engendrée sera une nouvelle surface développable, dont l'arête

Digitized by Google

de rebroussement, perpétuellement touchée par la droite génératrice, est entièrement sur la première surface développable. Cette nouvelle surface développable est perpétuellement normale au plan générateur, tandis que la première est perpétuellement touchée par lui. Enfin ces deux surfaces développables ont entre elles cette relation, que la première est la développée de la seconde : ainsi les surfaces développables ne sont qu'un cas infiniment particulier de la surface que nous considérons.

XIII.

Seconde génération. Une surface quelconque de révolution, constante de forme et de grandeur, étant supposée fixe sur son axe, mais mobile avec lui, concevons que l'axe tourne autour d'un de ses propres points, et entraîne la surface de révolution dans une seconde position à une distance quelconque de la première ; on aura alors deux surfaces de révolution *semblables* et égales entre elles, et placées à égales distances du point d'intersection de leurs axes. Ces deux surfaces se couperont dans une courbe plane, dont le plan passera par le point commun aux deux axes, sera perpendiculaire au plan des deux axes, et partagera en deux parties égales l'angle que les deux axes forment entre eux.

Cela posé, concevons que l'axe de la surface de révolution roule sur une courbe à double courbure quelconque, c'est-à-dire, se meuve de manière à être perpétuellement tangent à cette courbe, sans glisser sur elle, et qu'il entraîne avec lui la surface de révolution ; il engendrera une surface développable qui aura pour arête de rebroussement la courbe perpétuellement touchée ; et la surface de révolution, constante de forme et de grandeur, parcourra un espace dont l'enveloppe sera la surface dont nous nous occupons.

En effet, considérons deux enveloppées consécutives qui sont ici deux surfaces de révolution semblables et égales entre elles, dont les axes se coupent, puisqu'ils sont deux tangentes consécutives d'une même courbe ; et qui sont toutes deux à la même distance de ce point de rencontre des deux axes. La courbe d'intersection de ces deux enveloppées, courbe

Digitized by Google

qui sera la caractéristique de l'enveloppe, sera plane, ne différera pas du méridien de l'enveloppée, et sera par conséquent constante de forme comme lui. Le plan de cette caractéristique passera par le point commun aux deux axes, et sera perpendiculaire au plan qui passe par ces deux axes; il sera donc perpendiculaire au plan tangent à la surface développable parcourue par l'axe. Enfin ce plan devant partager en deux parties égales l'angle infiniment petit formé par deux axes consécutifs, pourra être considéré comme passant par l'un d'eux, et par conséquent comme tangent à la courbe touchée par l'axe mobile. Donc le plan de la caractéristique sera perpétuellement tangent à la surface développable qui est la développée de celle que parcourt l'axe. Mais ce plan est normal à l'enveloppe dans tous les points de la caractéristique; donc il contiendra toutes les normales pour les différens points de la caractéristique; donc toutes ces normales seront tangentes à la surface développable, développée de celle qu'engendre l'axe; donc l'enveloppe est telle que toutes ses normales sont tangentes à une même surface développable.

XIV.

Dans la génération que nous venons de donner, les points qui se correspondent dans les différentes caractéristiques sont tous à la même distance de leurs axes respectifs; les courbes qui passent par ces points homologues ont donc tous leurs points à la même distance de la surface développable parcourue par l'axe de l'enveloppée. Donc la surface que nous considérons n'est autre chose que celle de la *moulure générale* poussée sur une surface développable quelconque, au moyen d'un profil arbitraire continu ou discontinu, mais qui doit être plan, et dont le plan doit toujours être normal à la surface développable, et être tangent à l'arête de rebroussement de cette dernière surface.

Cette propriété comporte encore une définition complète et exacte de la surface que nous considérons.

XV.

Toute surface de révolution peut être regardée comme l'enveloppe

Digitized by Google

de l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre se meut sur l'axe. Dans la génération précédente, chacune des enveloppées peut donc elle-même être regardée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère variable arbitrairement de rayon, et dont le centre se meut sur une des droites de la surface développable; mais ce qu'il y a d'arbitraire dans la variation du rayon, n'a lieu que pour une seule surface de révolution; en sorte que, pour toutes les autres, les sphères dont les centres se trouvent sur une même ligne de courbure de la surface développable, doivent avoir le même rayon que celle qui leur correspond dans la première surface de révolution.

D'après cela, étant donnée une surface développable quelconque, si l'on conçoit qu'une sphère variable de rayon se meuve de manière que son centre parcoure successivement tous les points de cette surface, avec cette condition cependant que la sphère soit toujours de même rayon lorsque son centre est sur la même ligne de courbure de la surface développable, quelle que soit d'ailleurs la loi suivant laquelle elle en change quand le centre passe d'une des lignes de courbure à une autre, cette sphère parcourra un espace dont l'enveloppe générale, ou la double enveloppe, sera la surface que nous considérons.

Il est nécessaire de donner une épithète à l'enveloppe dont il s'agit ici, parce qu'elle diffère de toutes celles dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent. Les enveloppes simples touchent l'enveloppée dans une courbe qui est la caractéristique et qui est l'intersection de deux enveloppées consécutives. L'enveloppe que nous considérons ne touche chaque enveloppée qu'en un seul point, déterminé sur l'enveloppée par l'intersection des deux caractéristiques. Dans le cas présent, une quelconque des sphères est coupée dans la circonférence d'un de ses petits cercles par celle qui la suit immédiatement, et dont le centre est placé sur la même droite de la surface développable; elle est coupée dans la circonférence d'un de ses grands cercles par celle qui la suit immédiatement, et dont le centre est sur la même ligne de courbure de la surface

Digitized by Google

développable; et c'est dans le point d'intersection de ces deux circonférences qu'elle est touchée par la double enveloppe.

La courbe qui touche la série des petits cercles de mêmes rayons, et qui est leur intégrale particulière, est une des caractéristiques de la double enveloppe; celle qui touche une série de grands cercles de rayons différens, et qui est leur intégrale particulière, est l'autre caractéristique de la double enveloppe; et c'est encore dans l'intersection de ces deux caractéristiques que la double enveloppe touche la sphère individuelle.

XVI.

Dans la dernière génération, si l'on considère la suite des sphères de même rayon, dont les centres sont placés sur la même ligne de courbure de la surface développable, l'enveloppe simple de ces sphères sera la surface d'un tuyau circulaire de rayon constant, et dont l'axe curviligne sera la ligne de courbure elle-même. Cette surface sera touchée par la surface engendrée dans une courbe dont tous les points seront distans de la ligne de courbure, d'une quantité égale au rayon constant du tuyau; et si l'on considère les surfaces de deux de ces tuyaux consécutifs et de rayons différens, elles se couperont dans la courbe de contact du tuyau avec la surface engendrée.

Donc si l'on suppose que la surface du tuyau soit mobile, de manière, 1.° que son axe curviligne se confonde successivement avec les différentes lignes de courbure de la surface développable; 2.° que son rayon, qui est constant pour toute l'étendue du tuyau, varie d'une manière quelconque, en même temps que l'axe curviligne change de position, elle parcourra un espace dont l'enveloppe simple sera la surface engendrée. La surface du tuyau mobile est donc une enveloppée nouvelle, et l'intersection de deux de ces enveloppées consécutives produit la seconde caractéristique de l'enveloppe, comme l'intersection de deux surfaces de révolution consécutives produit la première.

Donc enfin, en regardant la seconde caractéristique comme une génératrice, la surface est engendrée par le mouvement d'une courbe

Digitized by Google

variable de forme et de grandeur, qui se meut de manière qu'elle soit perpétuellement une trajectoire orthogonale du plan mobile qui contient la génératrice plane.

Recherche de l'équation intégrale de la surface.

XVII.

Nous avons vu que la surface dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque, est susceptible de cinq générations essentiellement différentes.

Elle peut être engendrée par une courbe mobile de deux manières différentes; ou par une courbe plane, constante de forme, de grandeur et de position dans son plan, mais dont le plan roule sans glisser sur la surface développable; ou par une courbe à double courbure, variable de grandeur, qui se meut de manière qu'elle ne cesse pas d'être une trajectoire orthogonale au plan mobile qui contient la génératrice plane.

Elle peut être considérée comme enveloppe simple de l'espace parcouru par deux surfaces mobiles essentiellement différentes; ou par une surface de révolution quelconque constante de forme et de position sur son axe, mais dont l'axe se meut de manière à être perpétuellement tangent à une même courbe à double courbure; ou par la surface d'un tuyau à section circulaire, dont le rayon est constant dans toute son étendue, dont l'axe curviligne se confond perpétuellement avec la ligne de courbure d'une même surface développable, et qui se meut de manière qu'elle change de rayon suivant une loi quelconque, lorsque l'axe curviligne change de position, et passe d'une ligne de courbure à une autre.

Enfin, elle peut être considérée comme l'enveloppe générale de l'espace parcouru par une sphère mobile et variable de rayon, dont le centre parcourra successivement tous les points d'une même surface développable quelconque, et dont le rayon, constant lorsque le centre reste sur la même ligne de courbure de la surface développable, change de grandeur d'une manière quelconque, lorsque le centre passe d'une des lignes de courbure à une autre.

Digitized by Google

Chacune de ces cinq générations peut conduire directement à toutes les équations de la surface, tant intégrale qu'aux différences partielles de tous les ordres; mais elles ne le font pas avec la même facilité. Pour l'équation intégrale, c'est la dernière génération qui exige des considérations moins compliquées, et c'est elle que nous allons employer; ainsi nous regarderons la surface comme enveloppe générale de l'espace parcouru par une sphère mobile.

XVIII.

La surface développable parcourue par le centre de la sphère mobile peut être regardée en même temps et comme le lieu des tangentes de son arête de rebroussement, et comme le lieu des développantes de cette arête; en sorte qu'un point est déterminé sur cette surface lorsqu'on indique la tangente de l'arête de rebroussement, et la développante de cette arête à l'intersection desquelles il doit se trouver.

Cela posé, soient $x = \varphi z$, $y = \psi z$ les deux équations de l'arête de rebroussement de la surface développable parcourue par le centre de la sphère mobile; puis, considérant la tangente de cette arête dans une position quelconque, soit α la valeur de z au point de contact, les trois coordonnées de ce point de contact seront

$$x = \varphi \alpha$$
$$y = \psi \alpha$$
$$z = \alpha.$$

Les deux équations de la tangente en x, y, seront donc

$$x - \varphi = (z - \alpha)\,\varphi' \alpha$$
$$y - \psi = (z - \alpha)\,\psi' \alpha.$$

La position de cette tangente sur la surface développable sera déterminée par la valeur de α; et si l'on élimine α entre les deux équations précédentes, on aura l'équation du lieu des tangentes, c'est-à-dire de la surface développable elle-même.

L'élément de l'arc de l'arête de rebroussement sera évidemment $d\alpha \sqrt{(1 + \varphi'^2 + \psi'^2)}$, ou, en faisant, pour abréger, $1 + \varphi'^2 + \psi'^2 = h^2$, l'expression

Digitized by Google

l'expression de cet élément sera $h\,d\alpha$, et par conséquent la longueur de l'arc rectifié de l'arête de rebroussement sera $\int h\,d\alpha$. Cette expression comprend implicitement une constante arbitraire qui dépend du point de l'arête par lequel commence sa rectification.

Actuellement, si, pour obtenir le point d'une développante, on porte l'arc rectifié sur la tangente, à partir du point de contact, et du côté de l'arc rectifié, l'amplitude de cet arc, dans le sens de chacune des coordonnées x, y, z, sera

dans le sens des x, $\frac{\varphi'}{h} \int h\,d\alpha$;

dans le sens des y, $\frac{\psi'}{h} \int h\,d\alpha$;

dans le sens des z, $\frac{1}{h} \int h\,d\alpha$;

et les coordonnées du point de la développante qu'on aura ainsi déterminé, seront

$$x = \varphi - \frac{\varphi'}{h} \int h\,d\alpha;$$

$$y = \psi - \frac{\psi'}{h} \int h\,d\alpha;$$

$$z = \alpha - \frac{1}{h} \int h\,d\alpha.$$

La position de ce point sur la tangente dépendra de la grandeur de la constante arbitraire comportée par le signe d'intégration ; mais si l'on suppose que cette constante conserve toujours la même valeur, les points déterminés pour les différentes valeurs de α, c'est-à-dire, pour toutes les tangentes successives, seront tous sur la même développante de l'arête de rebroussement; ensorte que si l'on complète l'intégrale de manière que sa valeur soit nulle lorsque α a une valeur déterminée, par exemple, lorsque l'on a $\alpha = 0$, le point sera sur la développante qui passe par l'intersection de l'arête de rebroussement avec le plan des x, y.

Prenant donc cette première développante comme une origine arbitraire à laquelle nous rapporterons toutes les autres, et considérant que chacune des autres développantes a tous ses points à égales distances

Digitized by Google

de la première, si l'on suppose que pour l'une quelconque d'entre elles cette distance soit exprimée par β, les trois coordonnées d'un point quelconque de cette nouvelle développante seront,

$$x = \varphi - \frac{\varphi'}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)$$
$$y = \psi - \frac{\psi'}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)$$
$$z = \alpha - \frac{1}{h}(\beta + \int h\,d\alpha).$$

Les valeurs de ces trois coordonnées sont donc celles d'un point déterminé sur la surface développable par les valeurs des deux quantités α, β, dont la première indique la tangente de l'arête de rebroussement, dont la seconde indique la développante de cette arête, et qui par leur intersection déterminent ce point sur la surface.

XIX.

Il n'est peut-être pas inutile d'observer en passant, 1.° que, les trois dernières équations appartenant au point général d'une surface développable, si l'on élimine entre elles les deux quantités α, β, le résultat de l'élimination en x, y, z n'est autre chose que l'équation de la surface développable elle-même; 2.° que si l'on élimine β seule, ce qui entraîne aussi l'élimination de $\int h\,d\alpha$, les deux équations résultantes

$$x - \varphi = (z - \alpha)\varphi'$$
$$y - \psi = (z - \alpha)\psi'$$

sont celles de la tangente dont la position est déterminée par la valeur de α; 3.° enfin, que si l'on élimine α seule (ce qui ne peut s'effectuer tant que les fonctions φ et ψ sont regardées comme arbitraires), les deux équations résultantes sont celles de la développante de l'arête de rebroussement déterminée par la valeur de β qui reste dans les équations.

XX.

Considérons actuellement la sphère mobile, et représentons par x', y', z' les coordonnées de son centre; comme ce centre est un point

Digitized by Google

de la surface développable, on aura,

$$x' = \varphi - \frac{\varphi'}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)$$
$$y' = \psi - \frac{\psi'}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)$$
$$z' = \alpha - \frac{1}{h}(\beta + \int h\,d\alpha).$$

D'ailleurs le rayon de la sphère étant constant lorsque son centre est sur une même développante de l'arête de rebroussement, et variable lorsque le centre passe d'une développante à une autre, ce rayon est donc constant et variable en même temps que β, et par conséquent fonction de β. De plus, la forme de cette fonction dépend uniquement de la nature de la génératrice plane qui est arbitraire; ainsi le rayon de la sphère mobile est une fonction arbitraire de β que nous représenterons par $\pi\,\beta$. Donc l'équation en x, y, z de la sphère mobile sera,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (\pi\,\beta)^2;$$

or, remettant pour x', y', z' leur valeur

$$\left.\begin{aligned}&[x - \varphi + \tfrac{\varphi'}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)]^2\\ +\,&[y - \psi + \tfrac{\psi'}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)]^2\\ +\,&[z - \alpha + \tfrac{1}{h}(\beta + \int h\,d\alpha)]^2\end{aligned}\right\} = (\pi\,\beta)^2$$

que, pour abréger, nous représenterons par $M = 0$.

Or, si l'on considère deux sphères consécutives dont les centres soient sur la même développante, la quantité β aura la même valeur pour toutes deux; leurs équations ne différeront entre elles que par la valeur de α qui aura varié de l'une à l'autre. Elles se couperont dans un grand cercle dont la circonférence passera par le point de contact de l'enveloppée avec l'enveloppe générale, et la différentielle de $M = 0$ prise en regardant α comme seule variable, c'est-à-dire,

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

appartiendra à la circonférence de ce grand cercle.

De même, si l'on considère deux sphères consécutives dont les centres

Digitized by Google

soient sur la même tangente à l'arête de rebroussement, les équations de ces deux sphères ne différeront entre elles que par la valeur de β qui aura varié de l'une à l'autre. Ces sphères se couperont dans un petit cercle dont la circonférence passera encore par le point de contact de l'enveloppée avec l'enveloppe générale ; et la différentielle de $M = 0$ prise en ne faisant varier que β, c'est-à-dire,

$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0$$

appartiendra à la circonférence de ce petit cercle.

Donc on aura pour le point de contact de la sphère mobile avec l'enveloppe générale, les trois équations

$$M = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0 ;$$

mais le point de contact, en vertu des valeurs dont sont susceptibles les deux indéterminées α, β, peut être transporté successivement sur tous les points de la surface engendrée, qui n'est autre chose que le lieu de tous les points qu'on peut obtenir en donnant successivement à α et à β dans ces trois équations toutes les valeurs possibles ; donc le résultat de l'élimination des deux indéterminées α et β entre les trois équations précédentes est en x, y, z, l'équation intégrale de la surface engendrée.

XXI.

Si des trois équations précédentes on ne considère que les deux premières

$$M = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0 ,$$

dans lesquelles la quantité β ait une valeur déterminée et constante, il est clair qu'elles appartiennent à la circonférence du grand cercle dans laquelle la sphère mobile est coupée par celle qui est de même rayon et infiniment voisine. Le plan de ce cercle est normal à la surface développable, et passe par une tangente à l'arête de rebroussement ; son

Digitized by Google

centre est toujours sur une même développante de cette arête ; la position du centre sur la développante est déterminée par la valeur de α ; et le rayon est constant. Le lieu de tous les cercles qu'on obtiendrait en donnant à α dans les équations toutes les valeurs possibles, est la surface d'un tuyau à section circulaire, de rayon constant, et dont l'axe curviligne serait une des développantes de l'arête de rebroussement de la surface développable.

Donc le résultat de l'élimination de α entre les deux seules équations est en x, y, z et β l'équation intégrale de la surface du tuyau à section circulaire, constant de rayon, et dont l'axe curviligne est une des lignes de courbure de la surface développable ; équation dans laquelle la valeur de β détermine quelle est la ligne de courbure qui sert d'axe curviligne.

La surface de ce tuyau est un cas particulier de la surface engendrée ; c'est celui où la génératrice plane, constante de forme et de position dans son plan, est la circonférence d'un cercle ; et nous avons déjà vu qu'en le supposant mobile en vertu de la variation de son paramètre β, elle est une enveloppée de la surface engendrée, considérée comme une enveloppe simple.

XXII.

De même, si des trois équations qui comportent l'équation intégrale de la surface engendrée, on ne considère seulement que la première et la dernière, c'est-à-dire

$$M = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$

dans lesquelles α ait une valeur déterminée et constante, il est évident qu'elles appartiennent à la circonférence du petit cercle dans lequel la sphère mobile est coupée par celle qui est infiniment voisine et dont le centre est sur la même tangente à l'arête de rebroussement de la surface développable. Le plan de ce cercle est perpendiculaire à la tangente ; son centre est sur cette même tangente, et la position du centre est

Digitized by Google

déterminée par la valeur de β. Le lieu des circonférences de tous les cercles qu'on obtiendrait ainsi, en donnant dans ces deux équations toutes les valeurs possibles à β, est évidemment une surface de révolution autour de la tangente considérée comme axe. Donc le résultat de l'élimination de β entre ces deux équations seulement est en x, y, z et α l'équation intégrale d'une surface de révolution dont le méridien est arbitraire et invariable, qui est fixe sur son axe, et dont l'axe est tangent à une courbe à double courbure. Dans cette équation, la grandeur de α détermine la position de l'axe de révolution.

Cette surface de révolution est encore un cas particulier de la surface engendrée; car elle n'est autre chose que ce que celle-ci devient lorsque la surface développable, autour de laquelle roule le plan générateur, est réduite à une droite; et nous avons vu qu'en la supposant mobile en vertu de la variation de son paramètre α; c'est-à-dire qu'en supposant que son axe roule sans glisser sur l'arête de rebroussement de la surface développable, elle est une autre enveloppée de la surface engendrée, considérée comme enveloppe simple.

XXIII.

Reprenons les trois équations

$$M = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0;$$

et supposons que des deux quantités α, β la première ait une valeur déterminée et invariable, tandis que la seconde est encore susceptible de toutes les valeurs possibles. Le centre de la sphère mobile ne pourra plus se transporter sur tous les points de la surface développable; il ne pourra se mouvoir que le long de la seule tangente de l'arête de rebroussement déterminée par la valeur de α. Le point de contact de la sphère mobile avec l'enveloppe générale, point auquel appartiennent

Digitized by Google

les trois équations, ne pourra plus parcourir successivement toute cette enveloppe ; quelque valeur que l'on donne à β, il se trouvera toujours sur la courbe de contact de l'enveloppe générale avec la surface de révolution autour de la tangente individuelle déterminée par la valeur de α. Or cette courbe de contact, qui est le lieu du point pour toutes les valeurs possibles β, est évidemment la première caractéristique de la surface engendrée. Donc si entre ces trois équations on élimine la seule quantité β, les deux équations résultantes seront en x, y, z, α, et sous forme intégrale, celles de la première caractéristique de la surface engendrée, et dans ces équations la valeur de α déterminera la caractéristique individuelle.

XXIV.

Supposons, au contraire, que dans les trois équations du point de contact de la sphère mobile avec l'enveloppe générale, ce soit β qui ait une valeur déterminée et invariable, tandis que α est à son tour susceptible de toutes les valeurs possibles, le centre de la sphère mobile ne pourra plus se mouvoir que sur une certaine développante individuelle de l'arête de rebroussement, développante qui sera déterminée par la valeur particulière de β. Quelque valeur que l'on donne à α, le point de contact se trouvera sur la courbe du contact de l'enveloppe générale avec la surface du tuyau circulaire dont l'axe curviligne correspond à la valeur particulière de β. Mais cette courbe de contact, lieu de ce point pour toutes les valeurs possibles de α, est la seconde caractéristique de l'enveloppe générale; donc si, entre les trois équations

$$M = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$

on élimine seulement la quantité α, les deux équations résultantes seront en x, y, z, β, et sous forme intégrale, celles de la seconde

Digitized by Google

caractéristique de la surface engendrée, équations dans lesquelles la valeur de β déterminera la caractéristique individuelle.

XXV.

Le raisonnement que nous venons de faire pour trouver les équations intégrales des caractéristiques, est général, et peut être employé pour toute surface dont l'équation résulte de l'élimination de deux indéterminées α, β entre trois équations dont les deux dernières sont les différentielles de la première prise en regardant α (pour l'une) et β (pour l'autre) comme seules variables; c'est-à-dire pour toute surface qui, dans son équation intégrale, est regardée comme enveloppe générale.

Mais, dans le cas présent, et pour la première caractéristique, l'opération devient beaucoup plus simple, car l'équation $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$ est immédiatement

$$(x-\Phi)\left(h\Phi''-\Phi'\frac{dh}{d\alpha}\right)+(y-\Psi)\left(h\Psi''-\Psi'\frac{dh}{d\alpha}\right)-(z-\alpha)\frac{dh}{d\alpha}=0,$$

dans laquelle la quantité β a naturellement disparu, en sorte que l'élimination de β est tout opérée; ainsi cette équation appartient purement à la première caractéristique. Or, pour une même valeur de α, c'est-à-dire pour une même caractéristique individuelle, cette équation est évidemment celle d'un plan; donc la première caractéristique est une courbe plane. D'ailleurs le plan passe par le point de l'arête de rebroussement pour lequel on a $x-\Phi=0$, $y-\Psi=0$, $z-\alpha=0$; de plus il est facile de reconnaître qu'il est tangent à cette arête, et normal au plan osculateur de cette courbe; donc le plan de la première caractéristique passe par une tangente de l'arête de rebroussement, et est toujours normal à la surface développable, et par conséquent est toujours tangent à la surface développable, développée de celle-ci..., &c. Propositions que nous avions trouvées précédemment par des considérations géométriques, et qui se déduisent analytiquement de l'équation intégrale obtenue par d'autres considérations.

Recherche

Digitized by Google

Recherche des Équations aux différences partielles du premier ordre.

XXVI.

Le propre des équations aux différences partielles du premier ordre, est d'exprimer les propriétés des surfaces par rapport à leurs plans tangens ou à leurs normales ; il s'agit donc d'exprimer que toutes les normales sont tangentes à une même surface développable, ou que chacune d'elles est dans un plan tangent à une même surface développable.

En représentant par x, y, z les coordonnées du point de la surface, si l'on représente par x', y', z' celles de la normale en ce point, les équations de la normale sont

$$x' - x + p(z' - z) = 0$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0;$$

or l'équation du plan tangent à une surface développable quelconque est

$$z' = x'\Phi\alpha' + y'\Psi\alpha' + \alpha',$$

dans laquelle la valeur de α' détermine le plan tangent individuel, et dans laquelle les formes des deux fonctions Φ et Ψ sont invariables si la surface développable est toujours la même. Il faut donc que les deux équations de la normale satisfassent à celle du plan ; mais si l'on élimine entre ces trois équations deux quelconques des coordonnées x', y', z', la troisième disparaît aussi ; et l'on a

$$p\Phi\alpha' + q\Psi\alpha' + 1 = 0,$$

équation qui doit avoir lieu pour tous les points de la surface. De plus, le point de la surface devant se trouver sur le plan tangent à la surface développable, on aura aussi

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha'.$$

Donc une des équations aux différences partielles du premier ordre de la surface proposée est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α' entre les deux équations précédentes.

Digitized by Google

XXVII.

On peut obtenir le même résultat par la considération du plan tangent dont la propriété est évidemment d'être constamment perpendiculaire au plan générateur. En effet, le plan générateur étant toujours tangent à une même surface développable, a pour équation

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha';$$

de plus l'équation du plan tangent est évidemment

$$z = px + qy + \text{constante},$$

dans laquelle les quantités p, q et la constante sont fonctions des coordonnées du point de contact, constant pour chaque plan tangent; or ces deux plans doivent être rectangulaires; donc il doit y avoir entre les coëfficiens de leurs équations la relation suivante,

$$p\Phi\alpha' + q\Psi\alpha' + 1 = 0.$$

On a donc pour tous les points d'une même génératrice plane, déterminée par la valeur particulière de α', les deux équations

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha'$$
$$0 = p\Phi\alpha' + q\Psi\alpha' + 1,$$

donc le résultat de l'élimination de α' entre les deux équations appartiendra au lieu général de la génératrice plane; c'est-à-dire, à la surface qu'elle engendre par son mouvement.

XXVIII.

Si, dans les deux équations précédentes, on regarde α' comme constante, la seconde est celle d'une surface cylindrique à base quelconque, dont la droite génératrice est constamment perpendiculaire au plan qui a pour équation la première : or les quantités p et q qui entrent dans l'équation de la surface cylindrique, sont les mêmes que celles qui appartiennent à la surface engendrée; donc la surface cylindrique touche la surface engendrée dans toute l'étendue de la caractéristique plane qui peut être considérée comme sa base; donc on peut la regarder

Digitized by Google

comme l'enveloppée cylindrique de la surface engendrée ; ce qui fournit la génération suivante.

Si l'on conçoit qu'une surface cylindrique quelconque, constante de base, se meuve de manière que si on la considère dans deux positions consécutives, la courbe suivant laquelle les deux surfaces cylindriques se coupent soit toujours dans le plan parallèle à la base mobile, cette surface parcourra un espace dont l'enveloppe sera la surface que l'on considère.

XXIX.

Nous avons vu, article IV, que si le lieu des centres d'une des courbures est une surface développable quelconque, l'équation du lieu des centres de l'autre courbure est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$z = x\Phi\alpha + y\Psi\alpha + \alpha$$
$$0 = p\Phi\alpha + q\Psi\alpha + 1 ;$$

or nous venons de voir que cette même équation est celle de la surface engendrée par une courbe plane dont le plan roule sans glisser sur la même surface développable ; la surface que nous considérons est donc telle que le lieu des centres de la courbure prise dans le sens de la génératrice plane, est une surface soumise à la même génération qu'elle ; ce que nous avions déjà trouvé par les considérations géométriques.

XXX.

La quantité que nous représentons par α' dans l'équation aux différences partielles, n'est pas la même que celle que nous avons exprimée par α dans l'intégrale ; de même les fonctions arbitraires Φ et Ψ ne sont pas les mêmes que les fonctions φ et $\downarrow$ qui entrent dans l'intégrale ; mais ces six quantités ont entre elles une relation qu'il est facile de trouver. En effet, l'équation

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha'$$

est celle du plan générateur pour lequel, *article XXV*, nous avons

Digitized by Google

trouvé une autre équation en α, φ, $\downarrow$. Si l'on met cette dernière équation sous la forme précédente, on a

$$z = x\left(\frac{h\varphi''d\alpha}{dh} - \varphi'\right) + y\left(\frac{h\downarrow''d\alpha}{dh} - \downarrow'\right) + \alpha + \varphi\varphi' + \downarrow\downarrow' - \frac{h(\varphi\varphi'' + \downarrow\downarrow'')d\alpha}{dh}.$$

Ces deux équations appartenant au même plan, il faut que leurs coëfficiens soient respectivement égaux; donc en mettant pour $h\,d\,h$ sa valeur $(\varphi'\varphi'' + \downarrow'\downarrow'')\,d\alpha$, on aura les trois équations

$$\alpha' = \alpha + \varphi\varphi' + \downarrow\downarrow' - \frac{h^2(\varphi\varphi'' + \downarrow\downarrow'')}{\varphi'\varphi'' + \downarrow'\downarrow''}$$

$$\Phi\alpha' = -\varphi' + \frac{h^2\varphi''}{\varphi'\varphi'' + \downarrow'\downarrow''}$$

$$\Psi\alpha' = -\downarrow' + \frac{h^2\downarrow''}{\varphi'\varphi'' + \downarrow'\downarrow''},$$

au reste, ces trois quantités α', $\Phi\alpha'$, $\Psi\alpha'$ sont les coëfficiens du plan qui touche l'arête de rebroussement au point dont les coordonnées sont $\Phi\alpha$, $\downarrow\alpha$, α, et qui est perpendiculaire au plan qui oscule la courbe en ce point.

D'après cela, il est facile de vérifier que l'équation aux différences partielles du premier ordre que nous venons de trouver directement par les considérations géométriques, est la même qu'une de celles qu'on aurait obtenues en différenciant l'intégrale comprise dans les trois équations $M = 0$, $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, $\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0$; car de l'article XXV, et de ce qui précède, il suit que l'équation $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$ est la même que

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha'.$$

De plus, si on différencie $M = 0$, en regardant successivement x, y, comme seules variables, et en regardant α, β comme constantes, ce à quoi on est autorisé en vertu de $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, $\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0$, on obtient deux autres équations qui, par l'élimination de β et en vertu des valeurs précédentes, produisent

$$p\Phi\alpha' + q\Psi\alpha' + 1 = 0,$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

Digitized by Google

XXXI.

Si l'on voulait traiter cette équation aux différences partielles du premier ordre pour l'intégrer, il faudrait d'abord chercher l'équation de la projection de sa caractéristique sur le plan des x, y, et on trouverait

$$\Phi\alpha' dy - \Psi\alpha' dx = 0,$$

ce qui donnerait pour les projections de la même courbe sur les deux autres plans

$$\Phi\alpha' dz + dx = 0$$
$$\Psi\alpha' dz + dy = 0,$$

équations dont deux quelconques comportent la troisième : or ces équations sont évidemment celles d'une courbe perpétuellement normale au plan qui a pour équation

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha',$$

et qui est mobile en vertu de la variation de α'; donc la caractéristique dont il s'agit ici est une trajectoire orthogonale du plan générateur, ce que nous savions déjà.

Si des trois dernières équations on tire les valeurs de α', $\Phi\alpha'$, $\Psi\alpha'$, on trouve

$$\alpha' = \frac{x dx + y dz + z dz}{dz}$$
$$\Phi\alpha' = \frac{-dx}{dz}$$
$$\Psi\alpha' = \frac{-dy}{dz}.$$

Donc si l'on établit que de ces trois quantités différentielles, deux quelconques sont fonctions arbitraires de la troisième, on aura les deux équations aux différences ordinaires de la caractéristique, qui seront

$$\Phi\left(\frac{x dx + y dy + z dz}{dz}\right) + \frac{dx}{dz} = 0$$
$$\Psi\left(\frac{x dx + y dy + z dz}{dz}\right) + \frac{dy}{dz} = 0.$$

Digitized by Google

XXXII.

L'équation intégrale contenant les trois fonctions arbitraires φ, ψ, π, doit être susceptible de trois équations aux différences partielles du premier ordre, dans chacune desquelles une des trois fonctions arbitraires ait disparu. Nous venons de trouver celle de ces trois équations qui est délivrée de la fonction π; il resterait donc à trouver celles qui ne contiendraient que φ et π pour l'une, et ψ et π pour l'autre. Ces deux équations sont de la nature de celles qu'on a coutume de regarder comme intégrales intermédiaires qui n'existent pas; elles existent néanmoins; mais on ne peut les obtenir que sous la forme d'équations aux différences mêlées, ordinaires et partielles, celles-ci étant du premier ordre. Je ne pourrais être clair sans entrer dans des détails préliminaires trop étendus, et je réserve à en parler dans un mémoire dont l'unique objet sera la théorie et la construction des surfaces exprimées par les équations aux différences mêlées ordinaires et partielles, et dans lequel la surface dont nous nous occupons, entrera comme une exemple remarquable.

Recherches des Équations aux différences partielles du second ordre.

XXXIII.

Les équations aux différences partielles du second ordre expriment les propriétés des surfaces, relatives ou à leurs lignes de courbure ou à leurs rayons de courbure. Or, la surface que nous considérons jouit, par rapport à ses courbures, de deux propriétés qui conviennent à toutes les surfaces individuelles de la même génération, et qui ne conviennent qu'à elles; la première est qu'une de ses lignes de courbure est constamment plane; la seconde est que pour l'autre ligne de courbure le rayon de la première courbure est constant. Donc, pour trouver les équations aux différences partielles du second ordre, il faut exprimer ces deux propriétés. Occupons-nous d'abord de la première.

Digitized by Google

Un plan ne peut convenir à toutes les lignes successives d'une même courbure, à moins qu'il ne soit mobile en vertu de la variation d'un seul de ses paramètres, ou que son équation ne soit de cette forme,

$$z = x\Phi\alpha + y\Psi\alpha + \alpha,$$

dans laquelle α est constante pour chacune des lignes de la courbure plane, et variable d'une de ces lignes à la suivante. De plus, ce plan devant contenir toutes les normales à la surface qui passent par les points de la ligne de courbure, on doit avoir l'équation

$$p\Phi\alpha + q\Psi\alpha + 1 = 0.$$

Actuellement l'équation générale des lignes de courbure est, comme on sait,

$$(dx + p\,dz)\,dq = (dy + q\,dz)\,dp.$$

Pour que cette courbe soit dans le plan, il faut que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ produite par son équation, soit égale à celle que donne l'équation du plan, différenciée en regardant α comme constante, c'est-à-dire, soit égale à $-\frac{\Phi\alpha - p}{\Psi\alpha - q}$. Faisant cette substitution, on trouve

$$(\Psi\alpha - q)(r\Phi\alpha + s\Phi\alpha) = (\Phi\alpha - p)(s\Phi\alpha + t\Psi\alpha).$$

On a donc entre les trois quantités α, $\Phi\alpha$, $\Psi\alpha$, trois équations desquelles il est facile de tirer leurs valeurs, et entre lesquelles on peut par conséquent éliminer l'indéterminée α.

En faisant, pour abréger, $1 + p^2 + q^2 = k^2$,

et

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t - V\{[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4k^2(rt - s^2)\} = 2V,$$

on trouve pour les quantités α, $\Phi\alpha$, $\Psi\alpha$ les valeurs suivantes :

$$\alpha = z + \frac{x(ps + qt - qV) - y(pr + qs - pV)}{pqr + (q^2 - p^2)s - pqt},$$

$$\Phi\alpha = \frac{ps + qt - qV}{pqr + (q^2 - p^2)s - pqt},$$

$$\Phi\alpha = -\frac{pr + qs - pV}{pqr + (q^2 - p^2)s - pqt}.$$

Digitized by Google

Donc, en éliminant α, on a pour la surface les deux équations aux différences partielles du second ordre,

$$\frac{ps+qt-qV}{pqr+(q^2-p^2)s-pqt} = \Phi\left(z+\frac{x(ps-qt-qV)-y(pr+qs-pV)}{pqr+(q^2-p^2)s-pqt}\right),$$

$$\frac{pr+qs-pV}{pqr+(q^2-p^2)s-pqt} = -\Psi\left(z+\frac{x(ps+qt-qV)-y(pr+qs-pV)}{pqr+(q^2-p^2)s-pqt}\right);$$

dont chacune contient encore une des deux fonctions arbitraires Φ, Ψ, et est par conséquent aussi générale que l'intégrale finie qui en contient trois.

XXXIV.

Les deux équations que nous venons de trouver d'après la propriété que la ligne de courbure a d'être plane, auraient pu être obtenues par la différenciation partielle de celle du premier ordre. Nous avons vu, en effet, *article XXVI*, que celle-ci est le résultat de l'élimination de α' entre les deux équations

$$z = x\Phi\alpha' + y\Psi\alpha' + \alpha',$$
$$0 = p\Phi\alpha' + q\Psi\alpha' + 1.$$

Or, si l'on différencie partiellement ces deux équations, et si l'on fait $d\alpha' = p'dx + q'dy$, on a

$$\Psi\alpha' - p = Mp',$$
$$\Psi\alpha' - q = Mq',$$
$$r\Phi\alpha' + s\Psi\alpha' = Np',$$
$$s\Phi\alpha' + t\Psi\alpha' = Nq',$$

dans lesquelles il est inutile de développer les valeurs de M, N, qui contiennent Φ' et Ψ'. Retranchant le produit des deux moyennes du produit des deux extrêmes, les quantités M, N, p', q' disparaissent toutes quatre, et l'on a

$$(\Psi\alpha' - q)(r\Phi\alpha' + s\Psi\alpha') = (\Phi\alpha' - p)(s\Phi\alpha' + t\Psi\alpha');$$

ce qui donne entre les trois quantités α', $\Phi\alpha'$, $\Psi\alpha'$ les mêmes équations que dans l'article précédent nous avons trouvées entre α, $\Phi\alpha$, $\Psi\alpha$, et

Digitized by Google

et qui, par l'élimination de α', produisent les mêmes équations aux différences partielles secondes.

XXXV.

Le radical que contient la quantité V est celui qui entre dans l'expression du rayon de courbure : si donc on prend sa valeur dans cette expression, pour la substituer dans celle de V, en nommant R le rayon de courbure, on aura

$$V = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t + \frac{R(rt - s^2)}{k},$$

et employant pour V cette valeur, au lieu d'une abréviation qui a quelque chose de capricieux, on en aura une autre qui emploie le rayon de courbure. Faisant donc cette substitution, les valeurs de α, $\Phi\alpha$, $\Psi\alpha$ deviennent

$$\alpha = z - px - qy + \frac{k^3[x(qr-ps)+y(qs-pt)]+(qx-py)(rt-s^2)R}{k[pqr+(q^2-p^2)s-pqt]},$$

$$\Phi\alpha = p - \frac{k^3(qr-ps)+q(rt-s^2)R}{k[pqr+(q^2-p^2)s-pqt]},$$

$$\Psi\alpha = q - \frac{k^3(qs-pt)-p(rt-s^2)R}{k[pqr+(q^2-p^2)s-pqt]},$$

et mettant pour α sa valeur dans les deux autres équations, on aura les deux équations aux différences partielles du second ordre.

Il est nécessaire de remarquer ici que le rayon R qui entre dans ces équations est celui de la courbure plane.

XXXVI.

On aurait pu se contenter d'employer une seule des trois équations

$$z = x\Phi\alpha + y\Psi\alpha + \alpha,$$

$$o = p\Phi\alpha + q\Psi\alpha + 1,$$

$$(\Psi\alpha - q)(r\Phi\alpha + s\Psi\alpha) = (\Phi\alpha - p)(s\Phi\alpha + t\Psi\alpha)$$

pour chasser des deux autres l'une des deux fonctions arbitraires; et alors les deux équations aux différences partielles du second ordre

Digitized by Google

auraient été l'une, le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$z = x\Phi\alpha - y\frac{1+p\Phi\alpha}{q} + \alpha,$$

$$(1+q^2+p\Phi\alpha)[qr\Phi\alpha - s(1+p\Phi\alpha)]$$
$$+ q(\Phi\alpha - p)[qs\Phi\alpha - t(1+p\Phi\alpha)] = 0,$$

et l'autre, le résultat de l'élimination de α entre les deux suivantes

$$z = -x\frac{1+q\Psi\alpha}{p} + y\Psi\alpha + \alpha,$$

$$p(\Psi\alpha - q)[r(1+q\Psi\alpha) - ps\Psi\alpha]$$
$$+ (1+p^2+q\Psi\alpha)[s(1+q\Psi\alpha) - pt\Psi\alpha] = 0;$$

d'où l'on voit que si les fonctions Φ et Ψ étaient déterminées et connues, ces deux différentielles secondes seraient linéaires en r, s, t; ce qui prouve que la surface à laquelle elles appartiennent peut être engendrée par une courbe déterminée qui est ici la génératrice plane, et qu'il n'est pas nécessaire de la considérer comme une enveloppe.

XXXVII.

S'il s'agissait d'intégrer l'une ou l'autre de ces équations sous la forme que nous venons de leur donner, et à laquelle on peut toujours les ramener en égalant à α la quantité qui est sous les fonctions arbitraires, il faudrait d'abord chercher les équations de la caractéristique; or, on sait que si la différentielle de la proposée, prise en regardant r, s, t comme seules variables, est

$$Rdr + Sds + Tdt = 0,$$

l'équation de la projection de la caractéristique sur le plan des x, y est

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0.$$

En opérant donc sur la première, on trouve pour la caractéristique

$$\left.\begin{array}{l} dy^2\,(q^2+1+p\Phi\alpha)q\Phi\alpha \\ +dxdy[(q^2+1+p\Phi\alpha)(1+p\Phi\alpha) - q^2\Phi\alpha(\Phi\alpha - p)], \\ -dx^2 q\,(1+p\Phi\alpha)(\Phi\alpha - p) \end{array}\right\} = 0;$$

Digitized by Google

équation qui a deux facteurs rationnels et qui produit les deux équations

$$(q^2 + 1 + p\Phi\alpha)dy - q(\Phi\alpha - p)dx = 0,$$
$$p\Phi\alpha\, dy + (1 + p\Phi\alpha)dx = 0.$$

On peut conclure de là, 1.° que la surface a deux caractéristiques indépendantes et dont l'une quelconque peut changer, tandis que l'autre reste la même; 2.° que les fonctions arbitraires qui complètent les intégrales premières et finies, sont composées de deux quantités différentes pour l'une et pour l'autre.

L'équation de la première caractéristique peut facilement être mise sous la forme

$$dz = \Phi\alpha dx - \frac{1 + p\Phi\alpha}{q} dy,$$

et l'équation arbitraire de la proposée est

$$z = x\Phi\alpha - \frac{1 + p\Phi\alpha}{q} y + \alpha.$$

Or, de ces deux équations, la première est la différentielle de la seconde, prise en regardant α comme constante, et toutes deux ont lieu pour la première caractéristique; donc, pour cette caractéristique, la quantité α est constante, ainsi que les deux coëfficiens de l'équation

$$dz = \Phi\alpha dx - \frac{1 + p\Phi\alpha}{q} dy;$$

donc le coëfficient de dy doit être une fonction arbitraire de α; et si l'on représente cette nouvelle fonction par $\Psi\alpha$, on aura

$$p\Phi\alpha + q\Psi\alpha + 1 = 0;$$

d'où il suit qu'une des intégrales premières de la proposée est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$z = x\Phi\alpha + y\Psi\alpha + \alpha,$$
$$0 = p\Phi\alpha + q\Psi\alpha + 1,$$

ce que l'on savait déjà.

Quant à la seconde caractéristique, son équation que nous venons de trouver peut facilement être mise sous la forme

$$\Phi\alpha = \frac{-dx}{dz};$$

Digitized by Google

mettant pour $\Phi\alpha$ cette valeur dans l'équation auxiliaire, on a

$$\alpha = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{dz};$$

ce qui produit deux des équations de cette caractéristique que nous avons trouvées article XXXI.

XXXVIII.

Nous avons déjà dit que la surface engendrée jouissait, par rapport à ses courbures, d'une autre propriété générale qui pouvait servir à en donner une définition complète : cette propriété est que pour tous les points d'une même ligne de la seconde courbure, le rayon de la première courbure est constant. En effet, chacun des points de la génératrice plane engendre une des lignes de la seconde courbure : or, cette génératrice est constante de forme; donc pour le même point générateur, le rayon de courbure de la génératrice, c'est-à-dire le rayon de la courbure plane de la surface, est constant.

La ligne de la seconde courbure étant toujours normale au plan générateur, les équations différentielles de ses projections sur les trois plans rectangulaires sont

$$\begin{aligned} \Phi\alpha\,dy - \Psi\alpha\,dx &= 0, \\ \Phi\alpha\,dz + dx &= 0, \\ \Psi\alpha\,dz + dy &= 0. \end{aligned}$$

Donc la surface est telle que si le point de la génératrice plane ne change pas, c'est-à-dire que si l'une des trois équations précédentes a lieu, par exemple

$$\Phi\alpha\,dy - \Psi\alpha\,dx = 0,$$

le rayon de courbure R de la génératrice plane ne change pas. Il faut donc que l'on ait

$$\Phi\alpha\,dy - \Psi\alpha\,dx = \Pi' R\,dR.$$

Si dans cette équation on met pour $\Phi\alpha$ et $\Psi\alpha$ les valeurs que nous avons trouvées article XXXV, et qui contiennent la même quantité R,

Digitized by Google

on aura une équation aux différences mêlées, ordinaires et partielles, qui seule exprimera toutes les surfaces soumises à la génération dont nous nous sommes occupés. Cette équation est aux différences partielles du second ordre, puisqu'elle contient les quantités r, s, t, R : elle est délivrée des deux fonctions arbitraires Φ et Ψ qui dépendent de la nature de la surface développable sur laquelle roule le plan générateur, et elle ne contient que la fonction Π qui dépend de la nature de la génératrice plane; elle est de plus aux différences ordinaires : elle est donc la différentielle ordinaire de la troisième équation aux différences partielles du second ordre, équation qu'elle peut suppléer, soit pour descendre de l'intégrale finie à l'équation aux différences partielles du troisième ordre, soit pour remonter de celle-ci à l'intégrale finie.

XXXIX.

L'équation aux différences mêlées que nous venons de trouver, est la même que celle qu'on aurait obtenue si l'on avait d'abord différencié l'équation intégrale de l'article XX aux différences partielles du second ordre; ce qui n'aurait pas suffi pour éliminer l'indéterminée α et les fonctions φ et $\downarrow$, ainsi que toutes leurs dérivées. Il eût fallu pour cela différencier ensuite une fois aux différences ordinaires, ce qui aurait introduit le mélange des différences ordinaires et partielles; et alors l'équation résultante eût encore différé de celle que nous venons de trouver, parce que les quantités β et $\Pi\beta$ qu'elle renferme, ne sont pas respectivement les mêmes que R et ΠR : mais il est facile de ramener l'une de ces équations à l'autre, en observant, ce qui est évident, que la quantité que nous avons exprimée par $\Pi\beta$ dans l'intégrale, est précisément celle que dans l'équation aux différences mêlées nous représentons par R.

Recherche de l'Équation aux différences partielles du troisième ordre.

XL.

Nous avons vu que, pour tous les points de la même ligne d'une courbure, le rayon de l'autre courbure est constant. Or, on sait que

Digitized by Google

l'expression du rayon de courbure et l'équation de la ligne de courbure sont

$$R = \frac{k}{2(rt-s^2)}\left[(1+q^2)t-2pqs+(1+p^2)t+\sqrt{\{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4k^2(rt-s^2)\}}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+p^2)t-(1+q^2)r \quad -\sqrt{\{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4k^2(rt-s^2)\}}}{2[(1+q^2)s-pqt]},$$

équations dans lesquelles le radical, qui est le même, a des signes différens, s'il s'agit de la ligne et du rayon de la même courbure : mais si l'on veut comparer le rayon d'une des courbures avec la ligne de l'autre, comme dans le cas présent, il faut que les signes du radical soient les mêmes pour l'un et pour l'autre.

Notre surface est donc telle, qu'en donnant à $-\frac{dy}{dx}$ la valeur qui convient à la seconde courbure, c'est-à-dire en faisant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+p^2)t-(1+q^2)r+\sqrt{\{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4k^2(rt-s^2)\}}}{2[(1+q^2)s-pqt]},$$

où le signe du radical est le même que dans la valeur de R, on ait $R =$ constante; par conséquent $dR = 0$, ou

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)dx + \left(\frac{dR}{dy}\right)dy = 0.$$

Faisant cette substitution, et effectuant les différenciations partielles de R, on aura l'équation aux différences partielles du troisième ordre.

XLI.

Cette équation du troisième ordre que nous venons de trouver directement par les considérations géométriques, pouvait être obtenue par la différenciation de chacune des trois équations du second ordre. Commençons d'abord par l'équation aux différences mêlées,

$$\Phi\alpha\, dy - \Psi\alpha\, dx = \Pi' R\, dR,$$

qui, étant regardée comme une différentielle ordinaire totale, donne pour différentielles partielles

$$-\Psi\alpha = \Pi' R\left(\frac{dR}{dx}\right),$$

$$\Phi\alpha = \Pi' R\left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Digitized by Google

En éliminant la fonction, on a l'équation

$$\Phi\alpha\left(\frac{dR}{dx}\right)+\Psi\alpha\left(\frac{dR}{dy}\right)=0;$$

qui, si l'on effectue les différenciations partielles de R, et si l'on substitue pour $\Phi\alpha$ et $\Psi\alpha$ leurs valeurs trouvées ou dans l'article XXXIII ou dans l'article XXXV, produira la même équation aux différences partielles du troisième ordre.

XLII.

Enfin, c'est encore la même équation qu'on obtient par la différenciation de l'une quelconque des deux autres équations du second ordre, et qui sont chacune le résultat de l'élimination de l'une des deux fonctions arbitraires $\Phi\alpha$, $\Psi\alpha$, entre les trois équations

$$z=x\Phi\alpha+y\Psi\alpha+\alpha,$$
$$o=p\Phi\alpha+q\Psi\alpha+1,$$
$$(\Psi\alpha-q)(r\Phi\alpha+r\Psi\alpha)=(\Phi\alpha-p)(s\Phi\alpha+t\Psi\alpha).$$

C'est cette équation que nous allons effectuer, parce qu'elle présente des formes plus simples. Soient

$$dr=u\,dx+w\,dy,$$
$$ds=w\,dx+w\,dy,$$
$$dt=w\,dx+v\,dy,$$
$$d\alpha=p'\,dx+q'\,dy.$$

En différenciant partiellement l'équation en r, s, t, on trouve

$$(\Psi\alpha-q)(u\Phi\alpha+w\Psi\alpha)-(\Phi\alpha-p)(w\Phi\alpha+w\Psi\alpha)+(rt-s^2)\Psi\alpha=Lp',$$
$$(\Psi\alpha-q)(w\Phi\alpha+w\Phi\alpha)-(\Phi\alpha-p)(w\Phi\alpha+v\Psi\alpha)-(rt-s^2)\Phi\alpha=Lq';$$

mais, en différenciant partiellement l'équation en x, y, z, on a

$$\Phi\alpha-p=Mp',$$
$$\Psi\alpha-q=Mq',$$

dans lesquelles il est inutile de développer les valeurs de L et de M. De ces quatre équations, si l'on multiplie l'une par l'autre les deux extrêmes, et l'une par l'autre les deux moyennes; et si l'on retranche

Digitized by Google

l'un de l'autre ces deux produits, les quantités p', q', L et M disparaissent à-la-fois, et l'on a

$$\left.\begin{array}{r}(\Phi\alpha-q)^2(u\Phi\alpha+u\Psi\alpha)-2(\Psi\alpha-q)(\Phi\alpha-p)(u\Phi\alpha+w\Psi\alpha)+(\Phi\alpha-p)^2(w\Phi\alpha+v\Psi\alpha)\\ +(rt-s^2)(1+\overline{\Phi\alpha}^2+\overline{\Psi\alpha}^2)\end{array}\right\}=0,$$

équation dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer pour $\Phi\alpha$ et $\Psi\alpha$ leurs valeurs en différences partielles du second ordre, que nous avons trouvées article XXXIII ou XXXV, et l'on aura l'équation aux différences partielles du troisième ordre, qui exprime généralement la surface que nous considérons, indépendamment de toute fonction arbitraire.

Cette équation, comme on voit, est linéaire en u, w, w, v.

J'en resterai là par rapport à cette surface, sur laquelle je me propose de revenir comme exemple, lorsque je traiterai de la construction et de l'intégration aux différences mêlées, ordinaires et partielles : mais elle a quelques rapports avec une autre surface dont je ne crois pas qu'il faille la séparer, et dont je vais m'occuper dans le mémoire qui suit.

SECOND

Digitized by Google

SECOND MÉMOIRE.

De la Surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure quelconque.

I.

Si l'on suppose qu'une sphère variable de rayon se meuve de manière que son centre parcoure une courbe à double courbure quelconque, et que la grandeur de son rayon dépende de la position du centre, cette sphère parcourra un espace dont l'enveloppe est la surface dont nous allons nous occuper. Je pourrais citer plusieurs exemples de surfaces soumises à cette génération, dont une des plus remarquables est celle de la colonne torse, qui n'est autre chose que l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une helice de vis dont l'axe est vertical.

II.

Le centre de la sphère mobile étant assujetti à être sur une courbe à double courbure, ses trois coordonnées ont entre elles les deux relations exprimées par les deux équations de la courbe; ainsi deux d'entre elles sont fonctions de la troisième ; mais le rayon qui dépend aussi de la position du centre, doit être de même une fonction de l'ordonnée principale ; donc le rayon et les trois coordonnées du centre sont tels que trois de ces quantités sont fonctions de la quatrième. Prenant donc le rayon lui-même pour quantité principale, et en la représentant par α, les trois coordonnées du centre seront des fonctions de α, et ces fonctions seront arbitraires. Ainsi, pour une valeur du rayon égale à α, l'équation de la surface de la sphère mobile, considérée comme enveloppe, sera

$$(x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \pi\alpha)^2 = \alpha^2,$$

dans laquelle les trois fonctions φ, ψ, π sont arbitraires.

Digitized by Google

Pour avoir une équation de la caractéristique, c'est-à-dire de l'intersection de deux sphères consécutives, il faut différencier l'équation de la sphère en regardant α comme seule variable ; ce qui donne

$$(x - \varphi)\varphi' + (y - \psi)\psi' + (z - \pi)\pi' + \alpha = 0.$$

Mais la caractéristique, à laquelle appartiennent les deux équations précédentes, peut être regardée comme la génératrice de la surface enveloppe, en regardant cette courbe comme mobile dans l'espace en vertu de la variation de α. Or, ce qui revient au même, l'enveloppe n'est autre chose que le lieu de toutes les caractéristiques individuelles qu'on obtiendrait en donnant à α successivement toutes les valeurs possibles ; donc l'équation intégrale de l'enveloppe n'est autre chose que le résultat de l'élimination de α entre les deux équations précédentes ; opération qui ne peut s'effectuer que lorsque les formes des trois fonctions φ, ψ, π sont déterminées.

III.

L'équation intégrale de la caractéristique que nous venons de trouver, est évidemment en x, y, z celle d'un plan ; donc cette courbe est l'intersection de la surface de la sphère mobile par un plan aussi mobile, et est par conséquent la circonférence d'un cercle : mais ce plan ne passe pas par le centre de la sphère, puisqu'indépendamment des trois termes qui contiennent $x - \varphi$, $y - \psi$ et $z - \psi$, l'équation a un quatrième terme α; donc ce cercle n'est point un grand cercle de la sphère mobile ; donc son plan n'est normal à l'enveloppe en aucun point de la caractéristique, et ne contient aucune des normales de la surface.

IV.

Si l'on considère la suite des caractéristiques dont la surface est le lieu, il est facile de reconnaître que deux quelconques d'entre elles, prises consécutivement, se rencontrent en deux points qui sont sur la droite d'intersection de leurs plans. Le lieu de tous les points ainsi déterminés est sur la surface une courbe à double courbure qui a deux branches, et qui est touchée dans chacune de ses branches par chaque caractéristique. Cette courbe est une ligne singulière de la sur-

Digitized by Google

face; c'est une arête de rebroussement, suite nécessaire de la génération.

Chacun des points de l'arête de rebroussement étant à l'intersection de deux caractéristiques consécutives, les coordonnées x, y, z de ce point sont celles de la caractéristique qui ne changent pas lorsque dans ses équations α change et devient $\alpha + d\alpha$: on aura donc une équation relative à ce point, si l'on différencie les équations de la caractéristique en regardant x, y, z comme constantes et α comme seule variable; ce qui donne la troisième équation

$$(x-\varphi)\varphi'' + (y-\psi)\psi'' + (z-\pi)\pi'' + 1 - \varphi'^2 - \psi'^2 - \pi'^2 = 0.$$

Pour un α déterminé, les trois équations donnent les valeurs des coordonnées x, y, z du point correspondant de l'arête de rebroussement: et cette arête elle-même est le lieu de tous les points qu'on obtiendrait ainsi en donnant successivement à α toutes les valeurs possibles.

Donc les équations intégrales de l'arête de rebroussement sont le résultat de l'élimination de α entre les trois équations précédentes.

V.

Les valeurs de x, y, z que produisent les trois équations précédentes, contiennent toutes le même radical. Si les quantités $\alpha, \varphi, \psi, \pi$ ont entre elles une relation telle que la valeur de ce radical commun soit nulle, deux caractéristiques quelconques ne se coupent plus en deux points; elles n'ont qu'un seul point de commun, et ce point est un point de contact; les deux branches de la courbe touchée par toutes les caractéristiques se confondent en une seule, et cette courbe, sans cesser d'être une ligne singulière de la surface, n'est plus une arête de rebroussement; elle est une ligne de striction.

Il est facile de trouver qu'en faisant, pour abréger,

$$1 - \varphi'^2 - \psi'^2 - \pi'^2 = h^2,$$

l'équation qui établit la relation que doivent avoir entre elles les quatre quantités $\alpha, \varphi, \psi, \pi$, pour que le radical évanouisse, est

$$[\alpha(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' + \pi'\pi'') - h^2]^2 + h^2[\alpha^2(\varphi''^2 + \psi''^2 + \pi''^2) - h^4] = 0.$$

Cette relation est destinée à chasser une des trois fonctions φ, ψ, π;

Digitized by Google

pour ce cas particulier, l'équation intégrale ne doit donc renfermer que deux des trois fonctions Φ, $\downarrow$, π, et son équation aux différences partielles délivrée de toute fonction arbitraire, ne doit donc être que du second ordre; mais l'équation en α, Φ, $\downarrow$, π que nous venons de trouver, n'est pas algébrique; elle est aux différences ordinaires du second ordre; on ne peut donc, par son moyen, éliminer une des trois fonctions arbitraires et ses deux dérivées, à moins qu'on ne différencie aux différences ordinaires les autres équations qui appartiennent à la surface; l'équation différencielle de ce cas particulier doit donc être aux différences mêlées ordinaires et partielles. Je reviendrai sur cette surface, et je la traiterai dans le plus grand détail, lorsque je l'emploierai comme exemple dans le mémoire que je donnerai sur les équations aux différences mêlées.

VI.

Lorsqu'une surface est du premier ordre, ou, pour mieux dire, lorsque l'équation de son enveloppée ne contient qu'une seule fonction arbitraire de α, son arête de rebroussement est toujours susceptible d'être exprimée par une seule équation aux différences ordinaires, délivrée de α et de la fonction. En effet, soit $M = 0$ l'équation de l'enveloppée qui ne soit composée que de $x, y, z, \alpha, \Phi\alpha$; les équations intégrales de l'arête de rebroussement seront $M = 0$, $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, $\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0$. On pourra donc différencier les deux premières en regardant α comme constante; ces deux premières, et leurs différentielles ordinaires, ne contiendront, par rapport à α, que α, $\Phi\alpha$, $\Phi'\alpha$; on pourra donc toujours éliminer ces trois quantités entre les quatre équations, et l'équation aux différences ordinaires résultante exprimera en général les arêtes de rebroussement de toutes les surfaces soumises à la même génération, et renfermera, comme cas particuliers, toutes les caractéristiques de ces surfaces.

Dans les surfaces d'ordres supérieurs, comme celle que nous traitons,

Digitized by Google

et dont l'équation de l'enveloppée contient plus d'une fonction arbitraire de a, quelque loin que l'on pousse les différenciations ordinaires, il est en général impossible d'éliminer toutes les fonctions, parce que chaque différenciation introduit des dérivées nouvelles; et l'on ne peut avoir pour l'arête de rebroussement une équation délivrée de a et de toutes ses fonctions, qu'aux différences mêlées ordinaires et finies. Cela tient à ce que, dans notre cas, par exemple, pour qu'un point appartienne à une arête de rebroussement, il ne suffit pas que chacun de ses points soit déterminé par l'intersection de deux circonférences de cercles consécutifs et variables de rayon; car si l'on faisait mouvoir un cercle variable de rayon de manière qu'il fût perpétuellement tangent à une même courbe donnée, sa circonférence n'engendrerait pas la surface dont nous nous occupons. Il faut que les circonférences des deux cercles consécutifs se coupent en deux points, et que ces deux points soient sur les deux branches de l'arête de rebroussement. Dans l'équation différencielle de cette arête, on est donc obligé de considérer en même temps deux points placés à une distance finie, ce qui introduit nécessairement les différences finies. Dans un mémoire où je m'occuperai de la construction des équations aux différences mêlées, ordinaires et finies, l'arête de rebroussement dont il s'agit ici entrera naturellement comme exemple.

VII.

Pour trouver directement les équations de la surface aux différences partielles du premier ordre, il faut exprimer une propriété générale du plan tangent ou de la normale : or la surface a évidemment cette propriété, que si par un quelconque de ses points on lui mène une normale, cette droite, qui sera aussi normale à la sphère enveloppée que la surface touche en ce point, passera par le centre de la sphère : or en nommant x', y', z', les coordonnées du point variable de la normale, les deux équations de cette droite sont, comme on sait,

$$x' - x + p(z' - z) = 0$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0;$$

Digitized by Google

la normale devant passer par le centre de la sphère dont les coordonnées sont $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, $\pi\alpha$, ces deux équations doivent donc avoir lieu pour la surface, en mettant pour x', y', z', les valeurs respectives φ, ψ, π; donc on aura

$$x - \varphi + p(z - \pi) = 0$$
$$y - \psi + q(z - \pi) = 0;$$

tirant de ces deux équations et de celle de la sphère les valeurs de x, y, z, et faisant pour abréger $1 + p^2 + q^2 = k^2$, on aura les trois équations

$$(x - \varphi)k + \alpha p = 0$$
$$(y - \psi)k + \alpha q = 0$$
$$(z - \pi)k - \alpha = 0,$$

qui comprennent les trois équations aux différences partielles du premier ordre de la surface; c'est-à-dire, que si l'on prend ces trois équations deux à deux, ce qui peut se faire de trois manières différentes, le résultat de l'élimination de α, entre chacun de ces trois systèmes, sera une des trois équations différencielles du premier ordre. Ainsi ces trois équations sont, la première, le résultat de l'élimination de α entre les deux équations,

$$(x - \varphi)k + \alpha p = 0$$
$$(y - \psi)k + \alpha q = 0;$$

la seconde, le résultat de l'élimination de α entre les deux suivantes

$$(y - \psi)k + \alpha q = 0$$
$$(z - \pi)k - \alpha = 0;$$

et la troisième, le résultat de l'élimination de α entre les deux autres

$$(z - \pi)k - \alpha = 0$$
$$(x - \varphi)k + \alpha p = 0,$$

où l'on voit que chacune de ces trois différencielles est délivrée d'une des trois fonctions arbitraires φ, ψ, π.

Digitized by Google

VIII.

Puisque toutes les normales à la surface, menées par les points de la génératrice considérée dans une position fixe, passent par le même point qui est le centre de la sphère correspondante; la génératrice est telle que les normales qui passent par deux de ses points consécutifs sont dans un même plan, elle est donc la ligne d'une des courbures de la surface. Il y a donc entre la surface que nous considérons ici, et celle qui fait l'objet du mémoire précédent, cette analogie, que dans l'une et dans l'autre, la ligne d'une des courbures est plane; mais il y a cette différence que, dans la surface précédente, le plan de cette ligne de courbure contient toutes les normales qui passent par ses différens points, tandis que dans celle-ci le plan n'en contient aucune. Le lieu des normales qui passent par la même ligne plane de courbure, est la surface d'un cône à base circulaire, dont le sommet est au centre de la sphère, et dont la base est dans le plan de la ligne de courbure.

IX.

Pour tous les points de la même ligne de courbure plane, le centre de cette même courbure n'est autre chose que le centre de la sphère enveloppée; donc, dans la surface que nous considérons, le lieu des centres d'une des courbures cesse d'être une surface courbe; il se réduit à une ligne courbe qui est celle que parcourt le centre de la sphère mobile, comme cela arrive aux surfaces de révolution qui en sont des cas particuliers.

X.

D'après cela il est facile de trouver, par des considérations géométriques, les trois équations aux différences partielles du second ordre; car il est évident que pour tous les points de la ligne plane de courbure, le rayon de cette courbure est constant et égal au rayon de la sphère

Digitized by Google

enveloppée que nous avons représenté par α : or l'expression générale du rayon de courbure est donnée en R par l'équation

$$R^2(rt - s^2) + Rk[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + k^4 = 0;$$

donc tirant de cette équation la valeur de R, et la substituant pour α dans les trois équations aux différences premières, les trois équations aux différences partielles secondes seront

$$\begin{aligned}(x - \Phi R)k + pR &= 0\\ (y - \downarrow R)k + qR &= 0\\ (z - \pi R)k - R &= 0,\end{aligned}$$

équations qui sont séparées, et dont chacune ne contient plus qu'une fonction arbitraire.

Ces équations sont les mêmes que celles qu'on aurait obtenues en différenciant partiellement les trois équations aux différences premières.

XI.

Les équations aux différences partielles du troisième ordre expriment les propriétés des surfaces courbes, relatives aux variations de leurs lignes de courbure ou de leurs rayons de courbure; or par rapport à ces variations, la surface que nous considérons jouit évidemment de cette propriété, que, pour tous les points de la ligne plane de courbure, le rayon de cette même courbure est constant; ce qui établit une opposition entre cette surface et celle du mémoire précédent, dans laquelle le rayon de la courbure plane est constant pour tous les points d'une même ligne de l'autre courbure. Si donc on représente par

$$Adx + Bdy = 0,$$

l'équation générale de la ligne de courbure que nous avons donnée, article XL du mémoire précédent, et dans laquelle le signe du radical doit être différent de celui qui entre dans l'expression du rayon de courbure R, afin que le rayon et la courbe appartiennent à la même courbure; il faut qu'en donnant à $\frac{dy}{dx}$ la valeur qu'elle a dans cette équation, le rayon de courbure soit constant, ou que l'on ait

Digitized by Google

ait $dR = 0$, ou enfin $\left(\frac{dR}{dx}\right) dx + \left(\frac{dR}{dy}\right) dy = 0$. On aura donc pour tous les points de notre surface

$$B\left(\frac{dR}{dx}\right) - A\left(\frac{dR}{dy}\right) = 0.$$

Si on effectue les différenciations partielles indiquées dans cette équation, on aura l'équation unique aux différences partielles du troisième ordre de la surface.

XII.

Pour effectuer les différenciations partielles de l'article précédent, et arriver à un résultat mieux ordonné, je reprends dès l'origine la recherche des lignes et des rayons de courbure.

Les équations de la normale, en x', y', z', sont, comme on sait,

$$x' - x + p(z' - z) = 0$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0.$$

Si l'on considère deux normales consécutives telles qu'elles soient dans un même plan, ou qu'elles se coupent, il faut différencier ces deux équations, en regardant x', y', z' comme constantes, ce qui donne

$$dx[1 + p^2 - (z' - z)r] + dy[\quad pq - (z' - z)s] = 0$$
$$dx[\quad pq - (z' - z)s] + dy[1 + q^2 - (z' - z)t] = 0,$$

dans lesquelles la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est celle qui convient à la ligne de courbure par laquelle passent les deux normales consécutives, et dans les quatre équations, les coordonnées x', y', z' sont celles du point de rencontre des deux normales, et par conséquent du centre de la courbure; on aura donc

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = R^2,$$

ou

$$z' - z = \frac{R}{k};$$

substituant cette valeur de $z' - z$ dans les deux équations différentielles, elles deviendront

$$dx\left(1 + p^2 - \frac{Rr}{k}\right) + dy\left(\quad pq - \frac{Rs}{k}\right) = 0$$
$$dx\left(\quad pq - \frac{Rs}{k}\right) + dy\left(1 + q^2 - \frac{Rt}{k}\right) = 0;$$

Digitized by Google

actuellement, soit fait, pour abréger,

$$Rr - (1 + p^2)k = A$$
$$Rs - pq\ k = B$$
$$Rt - (1 + q^2)k = C;$$

l'équation de la projection de la ligne de courbure sera indifféremment l'une des deux suivantes

$$A\,dx + B\,dy = 0$$
$$B\,dx + C\,dy = 0,$$

entre lesquelles éliminant $\frac{dy}{dx}$, on aura pour l'équation qui donne la valeur du rayon de la même courbure,

$$AC - B^2 = 0.$$

C'est cette équation qu'il faut différencier partiellement pour avoir les valeurs de $\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $\left(\frac{dR}{dy}\right)$.

XIII.

La différentielle ordinaire de l'équation $AC - B^2 = 0$, est

$$C\,dA - 2B\,dB + A\,dC = 0,$$

ou, en mettant pour dA, dB, dC leurs valeurs,

$$dR(Cr - 2Bs + At) + R(Cdr - 2Bds + Adt) - 2k[Cp\,dp - B(p\,dq + q\,dp) + Aq\,dq]$$
$$- dk[(1 + p^2)C - 2pq\,B + (1 + q^2)A] = 0.$$

Donc si l'on fait

$$dr = u\,dx + w\,dy,$$
$$ds = w\,dx + w\,dy,$$
$$dt = w\,dx + v\,dy.$$

Les deux différences partielles de cette équation sont

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)(Cr - 2Bs + At) + R(Cu - 2Bw + Aw) - 2k[Cpr - B(qr + ps) + Aqs]$$
$$- \frac{pr + qs}{k}[(1 + p^2)C - 2pqB + (1 + q^2)A] = 0,$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right)(Cr - 2Bs + At) + R(Cw - 2Bw + Av) - 2k[Cps - B(qs + pt) + Aqt]$$
$$- \frac{ps + qt}{k}[(1 + p^2)C - 2pqB + (1 + q^2)A] = 0.$$

Digitized by Google

Pour substituer ces valeurs de $\left(\frac{dR}{dx}\right), \left(\frac{dR}{dy}\right)$ dans

$$B\left(\frac{dR}{dx}\right) - A\left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

il faut multiplier la première par B, la seconde par A, et retrancher; ce qui donne pour l'équation aux différences partielles du troisième ordre,

$$R\left\{\begin{matrix} BCu - 2B^2u + ABw \\ - AC u + 2ABw - A^2v \end{matrix}\right\} - 2k(Bp - Aq)(Cr - 2Bs + At) - \frac{B(pr + qs) - A(ps + qt)}{k}[(1 + p^2)C - 2pqB + (1 + q^2)A] = 0.$$

Mais des trois termes dont cette équation est composée, le second est le double du troisième. En effet, si dans les équations qui donnent les valeurs de A, B, C, on prend celles de $1 + p^2$, pq, $1 + q^2$ pour les substituer dans le dernier facteur du troisième terme, on trouve, à cause de $AC - B^2 = 0$,

$$(1 + p^2)C - 2Bpq + (1 + q^2)A = \frac{R}{k}(Cr - 2Bs + At),$$

et prenant dans les mêmes équations pour r, s, t leurs valeurs pour les substituer dans le premier facteur du même terme, on trouve

$$\frac{B(pr + qs) - A(ps + qt)}{k} = (Bp - Aq)\frac{k^2}{R};$$

donc le troisième terme de l'équation aux différences partielles du troisième ordre sera

$$- k(Bp - Aq)(Cr - 2Bs + At),$$

et par conséquent la moitié du second terme; donc, réduisant et chassant C au moyen de $AC - B^2 = 0$, cette équation sera

$$\left.\begin{matrix} R(B^3u - 3B^2Aw + 3BA^2w - A^3v) \\ - 3k(Bp - Aq)(B^2r - 2ABs + A^2t) \end{matrix}\right\} = 0,$$

dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer pour A et B leurs valeurs qui sont en différences partielles du second ordre.

XIV.

S'il s'agissait d'intégrer cette équation, sa simplicité rendrait l'opération très-facile. En effet, l'équation de la projection de la caractéristique est

$$B^3dy^3 + 3B^2Ady^2dx + 3BA^2dydx^2 + A^3dx^3 = 0,$$

Digitized by Google

qui est un cube parfait, et dont la racine est indifféremment

$$Bdy + Adx = 0,$$

ou

$$Cdy + Bdx = 0,$$

à cause de $AC - B^2 = 0$; ce qui prouve que la surface n'a qu'une seule caractéristique, et que la quantité qui doit entrer sous les trois fonctions arbitraires qui complètent son intégrale finie, est la même.

Remettant dans ces équations pour A, B, C leurs valeurs, elles deviennent

$$(Rs - pqk)dy + [Rr - (1 + p^2)k]dx = 0,$$
$$[Rt - (1 + q^2)k]dy + [Rs - pqk)dx = 0,$$

ou

$$Rdp - k(dx + pdz) = 0,$$
$$Rdq - k(dy + qdz) = 0,$$

entre lesquelles, si l'on élimine la quantité R, on trouve pour la caractéristique

$$(dy + qdz)\,dp = (dx + pdz)\,dq,$$

qui est l'équation générale de la ligne de courbure; donc la caractéristique est une des lignes de courbure de la surface.

Si des deux équations

$$Rdp - k(dx + pdz) = 0,$$
$$Rdq - k(dy + pdz) = 0,$$

et de

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

on tire les valeurs de dx, dy, dz, on trouve

$$dx = Rd\frac{p}{k},$$
$$dy = Rd\frac{q}{k},$$
$$dz = -Rd\frac{1}{k};$$

équations qui, en regardant R comme constante, sont des différentielles

Digitized by Google

exactes. Or, ces trois équations ont lieu pour la caractéristique; donc pour tous les points de cette courbe la quantité R est constante. Donc, en intégrant ces trois équations, et les complétant chacune par une fonction arbitraire de la quantité R qui a été regardée comme constante, on aura pour la surface courbe les trois équations premières séparées

$$x - \varphi R = R\frac{p}{k},$$

$$y - \downarrow R = R\frac{q}{k},$$

$$z - \pi R = -R\frac{1}{k},$$

dans lesquelles il faut mettre pour R la valeur du rayon de courbure en différences partielles du second ordre.

La quantité R étant la seule dans ces équations qui contienne des différences partielles du second ordre, il est évident que si l'on éliminait R entre deux quelconques de ces équations, le résultat ne renfermerait plus que des différences partielles du premier ordre, et contiendrait deux des fonctions arbitraires; ce résultat serait donc une des intégrales secondes. L'élimination dont il s'agit ici ne peut s'effectuer tant que les fonctions qui contiennent R sont arbitraires, et on ne peut que l'indiquer. Donc les trois intégrales secondes sont les résultats de l'élimination de l'indéterminée R entre les trois équations précédentes considérées deux à deux; ce qui peut se faire de trois manières différentes.

Enfin, si l'on fait la somme des carrés des trois équations précédentes, on trouve

$$(x - \varphi R)^2 + (y - \downarrow R)^2 + (z - \pi R)^2 = R^2,$$

qui est l'équation de l'enveloppée mobile, en vertu de la variation de l'indéterminée R. L'équation intégrale finie est donc le résultat de l'élimination de R entre cette équation et sa différentielle, prise en regardant R comme seule variable.

XV.

L'équation aux différences partielles du second ordre, que nous venons de traiter, appartenant à une surface qui n'a qu'une seule caractéristique,

Digitized by Google

et l'intégrale finie de l'enveloppée ne contenant les quantités $x, y, \varphi\alpha, \downarrow\alpha$ que sous les parenthèses $(x - \varphi\alpha), (y - \downarrow\alpha)$, elle peut être intégrée d'une autre manière, que je ne dois pas passer sous silence, parce qu'elle convient à toutes les autres équations qui sont dans le même cas et pour les ordres supérieurs au premier.

Nous avons vu que l'équation de la caractéristique, déduite de l'équation du troisième ordre, est indifféremment l'une des deux suivantes

$$Bdy + Adx = 0,$$
$$Cdy + Bdx = 0:$$

mettant pour $\frac{B}{A}$ sa valeur $\frac{-dx}{dy}$ dans la proposée, elle devient

$$\left.\begin{array}{r} R(udx^3 + 3wdx^2dy + 3wdxdy^2 + vdy^3) \\ - 3k(pdx + qdy)(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on considère cette équation comme appartenant à la surface, et par conséquent aussi à l'enveloppée, de manière que dx et dy puissent être regardées l'une et l'autre comme constantes, elle peut être mise sous la forme suivante

$$Rd^3z - 3kdzddz = 0.$$

Actuellement des deux équations de la caractéristique si l'on multiplie la première par dx, la seconde par dy, et si l'on ajoute, on a

$$Cdy^2 + 2Bdxdy + Adx^2 = 0,$$

qui, par la restitution des valeurs de A, B, C, donne

$$R(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) - k[(1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2] = 0,$$

ou

$$Rddz - k(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0;$$

au moyen de laquelle chassant $\frac{R}{k}$ de l'autre équation aux différences ordinaires de z, on trouve pour la surface, et par conséquent pour l'enveloppée, l'équation aux différences ordinaires du troisième ordre

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)d^3z - 3dzddz^2 = 0,$$

qu'avec un peu d'habitude on reconnaît aisément pour être l'équation générale de la sphère, quelles que soient et la position de son centre

Digitized by Google

dans l'espace, et la grandeur de son rayon : mais si l'on ne la reconnaissait pas, il serait très-facile de l'intégrer ; car elle n'est autre chose que

$$d\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ddz} + z\right) = 0 ;$$

dont l'intégrale complétée par la constante arbitraire Δ est

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (z - \Delta)dz = 0.$$

En regardant dx et dy comme constantes, cette intégrale est une autre différentielle exacte qui peut se mettre sous la forme suivante,

$$d[x\,dx + y\,dy + (z - \Delta)dz] = 0,$$

dont l'intégrale doit être complétée par une quantité de cette forme $\beta dx + \gamma dy$, puisque dx et dy ont été regardées toutes deux comme constantes dans la différenciation ; donc l'intégrale seconde sera

$$(x - \beta)dx + (y - \gamma)dy + (z - \Delta)\,dz = 0,$$

dans laquelle β et γ sont deux nouvelles constantes arbitraires introduites par la même intégration ; ainsi l'intégrale troisième de l'équation de l'enveloppée sera

$$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 + (z - \Delta)^2 = a^2.$$

Or la surface à laquelle appartient la proposée n'a qu'une seule caractéristique ; par conséquent des quatre constantes arbitraires que contient l'intégrale précédente, trois quelconques sont des fonctions arbitraires de la quatrième ; donc l'équation intégrale de l'enveloppée, considérée comme mobile en vertu de la variation de son rayon, est

$$(x - \varphi a)^2 + (y - \psi a)^2 + (z - \pi a)^2 = a^2.$$

Donc enfin l'équation intégrale de l'enveloppe est le résultat de l'élimination de a entre cette équation et sa différentielle, prise en regardant a comme seule variable.

XVI.

Lorsqu'une surface courbe n'a qu'une seule caractéristique, c'est-à-dire lorsque les fonctions arbitraires qui complètent son équation intégrale sont toutes composées d'une même quantité a, il est toujours

Digitized by Google

possible de déterminer quelles doivent être les formes de toutes ces fonctions, parce que la surface passe par autant de courbes données arbitrairement dans l'espace, ou embrasse autant de surfaces courbes données. Mais, comme le procédé est un peu compliqué, je vais en donner la marche pour l'un et pour l'autre cas.

XVII.

Trois courbes étant données arbitrairement dans l'espace, déterminer les formes des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale, pour que la surface passe par ces trois courbes, ou, ce qui revient au même, pour que l'enveloppée dans son mouvement soit perpétuellement tangente à ces trois courbes.

Représentons les deux équations qui comprennent l'intégrale, par $L = 0$, $\left(\frac{dL}{d\alpha}\right) = 0$; puis soient $M = 0$, $N = 0$ les deux équations données en x, y, z de la première des trois courbes par lesquelles la surface doit passer. Si l'on considère ensemble les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, c'est-à-dire si l'on regarde les coordonnées x, y, z comme ayant respectivement les mêmes valeurs dans les trois équations, ces coordonnées sont celles d'un point commun à l'enveloppée et à la courbe : mais il ne suffit pas que ce point soit commun à la courbe et à la surface, il faut qu'il soit un point de contact; donc, si l'on différencie aux différences ordinaires ces trois équations, ce qui, pour la première, donnera

$$(x - \Phi\alpha)dx + (y - \downarrow\alpha)dy + (z - \pi\alpha)dz = 0,$$

et pour les deux autres

$$X'dx + Y'dy + Z'dz = 0,$$
$$X''dx + Y''dy + Z''dz = 0,$$

dans lesquelles les six coëfficiens sont connus et donnés par la différenciation, il faudra que les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ qui déterminent la direction de la tangente de la courbe, aient chacune la même valeur dans ces trois équations; donc si l'on élimine ces deux quantités entre les trois équations, on aura en $x, y, z, \Phi, \downarrow, \pi$, une équation que je

Digitized by Google

je représente par $G = o$, et qui doit avoir lieu pour que la courbe et l'enveloppée se touchent dans le point que l'on considère. Ainsi l'on aura entre les trois coordonnées de ce point, les quatre équations $L = o$, $M = o$, $N = o$, $G = o$. Donc si l'on élimine entre elles les trois coordonnées x, y, z du point de contact, on aura en α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, $\pi\alpha$ une équation que je représente par,

$$H = o,$$

et qui exprimera la relation que doivent avoir entre elles les trois fonctions arbitraires, pour que l'enveloppée touche la première courbe dans un certain point.

Actuellement, si, pour chacune des deux autres courbes données par lesquelles doit passer la surface, on fait les opérations analogues, on aura deux autres équations

$$H' = o,$$
$$H'' = o,$$

qui seront aussi en α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, $\pi\alpha$, et qui donneront les relations que les fonctions arbitraires doivent avoir entre elles, pour que l'enveloppée touche chacune de ces deux courbes.

Mais il ne suffit pas que l'enveloppée touche chacune des trois courbes; il faut que ce contact ait lieu pendant tout son mouvement, c'est-à-dire, il faut que les relations que nous venons d'exprimer ne cessent pas, quand même α varie; donc il faut que l'on ait encore

$$dH = o,$$
$$dH' = o,$$
$$dH'' = o,$$

équations qui contiendront les quantités α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, $\pi\alpha$, $\varphi'\alpha$, $\downarrow'\alpha$, $\pi'\alpha$. Nous aurons donc, entre ces sept quantités, les huit équations

$$L = o, \qquad \left(\frac{dL}{d\alpha}\right) = o,$$
$$H = o, \qquad dH = o,$$
$$H' = o, \qquad dH' = o,$$
$$H'' = o, \qquad dH'' = o.$$

Digitized by Google

Donc, en éliminant les sept quantités entre ces huit équations, on aura en x, y, z une équation délivrée de α et de toutes les fonctions arbitraires, et qui sera celle de la surface demandée.

XXVIII.

Trois surfaces courbes étant données arbitrairement dans l'espace, déterminer les formes que doivent avoir les fonctions arbitraires dans l'équation intégrale, pour que la surface engendrée touche chacune des surfaces données dans une courbe de contact; c'est-à-dire, pour que l'enveloppée, dans son mouvement, touche perpétuellement ces trois surfaces.

Représentons de même par $L = 0$, $\left(\frac{dL}{dx}\right) = 0$, les deux équations qui comprennent l'intégrale, et soit $M = 0$ l'équation donnée d'une des trois surfaces que doit toucher la surface engendrée. Si l'enveloppée et la surface donnée se touchent en un certain point, non-seulement les coordonnées x, y, z de ce point satisferont aux deux équations $L = 0$, $M = 0$, mais encore le plan tangent en ce point à l'une des surfaces coïncidera avec le plan tangent à l'autre surface en ce même point; donc si l'on différencie partiellement les équations de ces deux surfaces, ce qui, pour la première, donnera

$$p = -\frac{x - \varphi\alpha}{z - \pi\alpha},$$

$$q = -\frac{y - \downarrow\alpha}{z - \pi\alpha},$$

et pour la seconde

$$p = P,$$

$$q = Q,$$

dans lesquelles P et Q sont obtenues en x, y, z par la différenciation, il faudra que les valeurs de p et q, fournies par les deux équations, soient respectivement égales entre elles; ce qui donnera les deux équations

$$x - \varphi\alpha + P(z - \pi\alpha) = 0,$$

$$y - \downarrow\alpha + Q(z - \pi\alpha) = 0.$$

Digitized by Google

On aura donc, entre les coordonnées x, y, z du point de contact, quatre équations, savoir, les deux précédentes, et de plus $L=0$, $M=0$; donc si, entre ces quatre équations, on élimine les trois coordonnées, on aura en α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, $\pi\alpha$, une équation que je représente par

$$H = 0,$$

et qui exprimera la relation qui doit avoir lieu entre les trois équations arbitraires, pour que l'enveloppée touche la première des trois surfaces données en un certain point.

En opérant d'une manière analogue sur chacune des deux autres surfaces données, on aura en α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, $\pi\alpha$ deux autres équations

$$H' = 0,$$
$$H'' = 0,$$

qui exprimeront les relations que doivent avoir les trois fonctions arbitraires, pour que l'enveloppée touche aussi ces deux autres surfaces. Mais il ne suffit pas que ces trois contacts aient lieu pour une certaine portion de l'enveloppée; il faut qu'ils aient encore lieu si l'enveloppée vient à se mouvoir; c'est-à-dire, il faut que les trois relations subsistent quand même α viendrait à varier: donc il faut que l'on ait encore

$$dH = 0,$$
$$dH' = 0,$$
$$dH'' = 0.$$

Ces trois dernières équations contiennent les sept quantités α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, $\pi\alpha$, $\varphi'\alpha$, $\psi'\alpha$, $\pi'\alpha$. Or, entre ces sept quantités, nous avons les huit équations

$$L = 0, \qquad dL = 0,$$
$$H = 0, \qquad dH = 0,$$
$$H' = 0, \qquad dH' = 0,$$
$$H'' = 0, \qquad dH'' = 0,$$

Donc si, entre ces huit équations, on élimine les sept quantités, on aura en x, y, z une équation délivrée de toute fonction arbitraire, et qui sera celle de la surface demandée.

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur les Solutions particulières des Équations différentielles et des Équations aux différences.

Lu à l'Institut le 23 Floréal an 13.

Par M. POISSON.

Il existe des équations différentielles de tous les ordres, qui admettent des solutions particulières, c'est-à-dire, des solutions qui ne sont pas comprises dans leurs intégrales. Ce genre de solutions n'est pas moins important à considérer que les intégrales elles-mêmes ; car lorsqu'un problème conduit à une équation différentielle, c'est souvent la solution particulière de cette équation qui renferme la vraie solution du problème. Aussi les géomètres, dans le siècle dernier, se sont beaucoup occupés de la recherche de ces solutions, soit lorsque l'intégrale complète est connue, soit quand on connaît seulement l'équation différentielle ; mais, malgré leurs travaux, il m'a paru qu'il restait encore quelques points de cette théorie à éclaircir, sur-tout relativement aux équations différentielles d'un ordre supérieur au premier. J'ai aussi pensé que cette théorie pouvait être étendue aux équations aux différences finies ; et il est assez remarquable que cette extension, quelque naturelle qu'elle paraisse, n'ait point encore été faite. En effet, la seconde intégrale que *Charles* a trouvée, et celles que j'ai fait connaître dans un autre mémoire, ne sont pas, comme on le verra dans la suite, les solutions particulières des équations aux différences.

Je m'occuperai seulement ici de la recherche des solutions particulières, dans le cas où l'intégrale n'est pas connue, et où il s'agit de déduire ces solutions de l'équation différentielle ou aux différences à laquelle elles doivent satisfaire. Le problème qui fera l'objet de ces recherches, peut donc être ainsi énoncé :

Digitized by Google

Étant donnée une équation différentielle ou aux différences d'un ordre quelconque, trouver toutes les équations d'un ordre inférieur qui satisfont à la proposée comme solutions particulières ;

Et, réciproquement, *étant donnée une équation d'un ordre inférieur qui satisfait à la proposée, déterminer si cette équation est comprise dans les intégrales du même ordre, ou si elle doit être rangée parmi les solutions particulières.*

Les règles que l'on a trouvées pour le résoudre, sont maintenant complètes, et il en résulte ce théorême de calcul intégral : *que toute solution d'une équation différentielle ou aux différences, par cela seul qu'elle n'est pas comprise dans une solution plus générale et du même ordre qu'elle, peut être obtenue sous forme finie, sans résoudre aucune équation, et par le simple procédé de l'élimination.* C'est, en effet, la conclusion du mémoire que je soumets à la classe.

Ce mémoire est divisé en cinq articles. Dans le premier, je considère les équations différentielles du premier ordre, et je parviens au théorème que M. *Laplace* a donné dans les mémoires de 1772. L'analyse que j'emploie est à-peu-près celle d'*Euler*, rapportée par M. *Lagrange* dans le tome V (douzième cahier, page 202) du Journal de l'École polytechnique. Elle consiste à regarder les solutions particulières, comme des solutions de l'équation différentielle qui ne peuvent pas être complétées par une constante arbitraire. C'est, en effet, ce qui les distingue des intégrales particulières, et cette manière si simple de les envisager a d'ailleurs l'avantage précieux de pouvoir s'étendre à tous les genres d'équations aux différences que les géomètres ont considérées jusqu'ici.

Ce premier article est terminé par des remarques sur la nature des solutions particulières, qui conduisent, d'une manière nouvelle, à la théorie de M. *Lagrange*, dans laquelle on déduit ces solutions des intégrales complètes, par la variation de la constante arbitraire.

Dans le second article, je fais voir, par un exemple assez simple, que les équations aux différences du premier ordre admettent quelquefois des solutions sans constante arbitraire, et qui ne sont comprises

Digitized by Google

dans aucune de leurs intégrales, quoique celles-ci soient en nombre infini. On trouve ces solutions particulières par les mêmes règles que celles des équations différentielles; mais il faut observer que si l'on cherche à les déduire d'une intégrale quelconque, par la variation de la constante arbitraire, on retombe de nouveau sur une équation aux différences, dont il faut trouver directement les solutions particulières; circonstance qui a sans doute empêché qu'on ait remarqué plutôt l'existence de ces solutions, et qui a peut-être fait qu'on les a confondues avec les autres intégrales de la proposée.

Nous terminons cet article par quelques réflexions sur les intégrales *générales* des équations aux différences de tous les ordres. Ces intégrales renferment deux espèces distinctes de fonctions arbitraires. Les unes sont des fonctions périodiques dont la différence est nulle, que l'on substitue immédiatement aux constantes arbitraires; les autres sont des fonctions assujetties à quelques restrictions, et dont nous faisons connaître la véritable origine. Le nombre des premières est toujours marqué par l'ordre de l'intégrale que l'on considère; le nombre des secondes, ainsi que leur forme, ne peuvent être déterminés en général. On peut seulement démontrer; 1.° que les équations linéaires de tous les ordres, n'en comportent pas dans leurs intégrales; 2.° que le caractère distinctif de ces fonctions est de n'avoir jamais qu'un nombre limité de valeurs pour chaque valeur déterminée de la variable.

Dans le troisième article, nous considérons à-la-fois les équations différentielles et les équations aux différences de tous les ordres, et nous parvenons à des règles pour découvrir et pour distinguer entre elles, toutes les solutions particulières d'une équation donnée d'un ordre quelconque, depuis celles de l'ordre immédiatement inférieur, jusqu'aux solutions algébriques.

Le quatrième article renferme des remarques importantes sur les solutions particulières des équations différentielles relatives à des problèmes de dynamique. Nous prouvons, par des exemples, qu'il est nécessaire d'avoir égard à ces solutions, lorsqu'on veut représenter, dans

Digitized by Google

toute son étendue, le mouvement rectiligne d'un corps soumis à l'action d'une force donnée, et partant d'une position et avec une vîtesse aussi données. En effet, il arrive quelquefois que la loi de ce mouvement ne peut pas être comprise, pendant toute la durée du temps, dans une seule et même équation entre l'espace parcouru et le temps écoulé ; en sorte que cette loi est donnée pendant un certain temps, par l'intégrale de l'équation différentielle du mouvement, et, pendant un autre temps, par la solution particulière ; ou, si l'on veut, il y a, à une certaine époque, un changement brusque dans le mouvement du corps; mais ce changement est tel que le mouvement continue de satisfaire à l'équation différentielle que l'on obtient par le principe de *d'Alembert*. Dans d'autres cas, c'est la solution particulière elle seule qui représente le mouvement du corps dans toute son étendue ; et l'on serait induit en erreur sur la nature de ce mouvement, si l'on employait l'intégrale complète, en y déterminant les constantes arbitraires au moyen de la position et de la vîtesse initiales du corps.

On doit à M. *Lagrange* d'avoir montré, d'une manière claire et précise, ce que représentent les solutions particulières dans la théorie des courbes ; mais personne, que je sache, ne s'était encore proposé d'en déterminer l'usage dans les questions de dynamique. C'est cependant un point de la science qui mériterait d'être complétement éclairci, et sur lequel nous sommes loin d'avoir levé toute espèce de difficulté.

Enfin, le troisième article de ce mémoire est relatif aux solutions particulières des équations aux différences partielles, et au nombre de fonctions arbitraires qui doivent compléter leurs intégrales. On y démontre la règle proposée par M. *Legendre* dans les mémoires de 1790, pour trouver ces solutions ; et par rapport aux intégrales complètes, au moins par rapport à celles qui n'existent que sous forme de séries, on fait voir qu'on peut quelquefois effectuer des réductions dans le nombre des fonctions arbitraires, sans que l'intégrale perde rien de sa généralité.

Il n'est pas question, dans ce mémoire, des équations différentielles

Digitized by Google

entre trois ou un plus grand nombre de variables. Leurs solutions particulières sont cependant très-importantes à considérer, en ce qu'elles sont le plus souvent les seules équations qui puissent satisfaire à la proposée, en conservant aux variables toute l'indépendance qu'elles peuvent avoir. M. *Laplace* a donné des règles pour les déterminer dans le cas du premier ordre; et il serait desirable qu'on pût les étendre aux équations des ordres supérieurs. Mais cette recherche, à cause des difficultés qu'elle présente, et qui tiennent aux *conditions d'intégrabilité*, mérite d'être l'objet spécial d'un autre mémoire.

ARTICLE PREMIER.

Solutions particulières des Équations différentielles du premier ordre.

(1). Soit $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, une équation différentielle du premier ordre, résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Supposons que cette équation est satisfaite par une valeur de y, en fonction de x, telle que $y = X$, en sorte qu'on ait

$$\frac{dX}{dx} = f(x, X);$$

et proposons-nous de reconnaître si cette valeur est une intégrale ou une solution particulière.

Si la valeur $y = X$ est comprise dans l'intégrale complète, il faudra que cette intégrale soit de la forme $y = X + \alpha z$, α étant la constante arbitraire, et z représentant une fonction de x et de α, qui ne devient ni zéro ni infinie, quand on fait $\alpha = 0$. En effet, si cette intégrale, résolue par rapport à y, est représentée par $y = F(x, a)$, a étant la constante arbitraire, et que X résulte de $F(x, a)$, en donnant à a une valeur particulière, $a = b$; la fonction $F(x, a)$ sera de la forme $X + (a - b)^n z$, en désignant par n, l'exposant de la plus haute puissance de $(a - b)$ qui puisse diviser $F(x, a) - X$, et par z, une fonction de x et de a, qui ne devient ni zéro ni infinie, quand on fait $a = b$;

Digitized by Google

$a = b$; donc, prenant $(a - b)^n$ pour constante arbitraire, l'intégrale complète deviendra de la forme $y = X + \alpha z$.

En substituant cette valeur complète de y dans la fonction $f(x, y)$, on pourra lui donner cette forme

$$f(x, y) = f(x, X) + \alpha^n z^n P,$$

n désignant l'exposant de la plus haute puissance de α, qui soit facteur de $f(x, X + \alpha z) - f(x, X)$, et P représentant une fonction de x et de αz, qui ne devient ni zéro ni infinie pour la valeur $\alpha = 0$.

Par suite de cette transformation, et à cause de $-\frac{dX}{dx} = f(x, X)$, l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ devient

$$\alpha \frac{dz}{dx} = \alpha^n z^n P, \quad (a);$$

et la question est réduite à chercher s'il existe, pour z, une valeur en fonction de x et de α, qui rende cette équation identique, et qui ne devienne ni infinie ni zéro, quand on fait $\alpha = 0$. Or, il se présente trois cas à examiner : l'exposant n peut être < 1, $= 1$, > 1.

(2) Dans le premier cas, la valeur convenable de z n'existe pas; car si l'on divise par α^n les deux membres de l'équation (a), et que l'on fasse ensuite $\alpha = 0$, il vient $0 = z^n P$, équation impossible, puisque z et P sont des fonctions de α, qui ne deviennent pas nulles pour la valeur $\alpha = 0$.

Lorsqu'on a $n = 1$, il est toujours possible de déduire de l'équation (a), une valeur de z en série ordonnée suivant les puissances positives de α, et qui ne s'évanouit pas quand on fait $\alpha = 0$. Il faut, pour cela, employer la méthode connue des approximations successives.

Pour appliquer cette méthode à l'équation (a), je représente par p, ce que devient P, quand on fait $\alpha = 0$; par α^m, la plus haute puissance de α, qui soit facteur de $P - p$; enfin, par $\alpha^m Q$, la fonction $zP - zp$; l'équation (a) deviendra, en divisant les deux membres par α,

$$\frac{dz}{dx} - pz = Q\alpha^m.$$

Digitized by Google

Je fais, dans cette équation, $\alpha = 0$, et je désigne par t la partie de la valeur de z, indépendante de α, ou le premier terme de cette valeur en série; on aura, pour déterminer t, l'équation linéaire

$$\frac{dt}{dx} - pt = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente, posant $z - t = \alpha^m z'$, et divisant les deux membres par α^m, il vient

$$\frac{dz'}{dx} - pz' = Q.$$

Soit, comme plus haut, q, la valeur de Q pour $\alpha = 0$, α^l la plus haute puissance de α, qui soit facteur de $Q - q$; enfin, $Q - q = \alpha^l R$, l'équation en z' deviendra

$$\frac{dz'}{dx} - pz' = q + \alpha^l R;$$

et pour déterminer le premier terme de z', que je représenterai par t', il faut faire $\alpha = 0$ dans cette équation; ce qui donne l'équation linéaire

$$\frac{dt'}{dx} - pt' = q.$$

Pour continuer ce procédé, je retranche la dernière équation de la précédente; je fais $z' - t' = \alpha^l z''$; et après avoir divisé les deux membres de cette équation par α^l, je trouve

$$\frac{dz''}{dx} - pz'' = R.$$

Je suppose que r soit la valeur de R pour $\alpha = 0$; que α^k soit la plus haute puissance de α, facteur de $R - r$, et je fais $R - r = \alpha^k S$; l'équation en z'' devient

$$\frac{dz''}{dx} - pz'' = r + \alpha^k S;$$

et si t'' est le premier terme de z'', on aura, pour déterminer ce premier terme, l'équation linéaire

$$\frac{dt''}{dx} - pt'' = r.$$

Si l'on veut obtenir une troisième approximation, on retranchera la

Digitized by Google

dernière équation de la précédente ; on fera $z'' - t'' = \alpha^k z'''$, et divisant les deux membres de l'équation par α^k, on aura d'abord

$$\frac{dz'''}{dx} - pz''' = S;$$

puis, supposant que s soit la valeur de S, pour $\alpha = 0$; que α^k soit la plus haute puissance de α, facteur de $S - s$; et que $S - s = \alpha^k T$, on aura

$$\frac{dz'''}{dx} - pz''' = s + \alpha^k T.$$

Donc, si t''' est le premier terme de z''', on aura, pour en déterminer la valeur, l'équation linéaire,

$$\frac{dt'''}{dx} - pt''' = s.$$

On peut continuer l'application de cette méthode aussi loin qu'on voudra, et l'on voit qu'il en résulte pour z une valeur en série ordonnée suivant les puissances croissantes de α ; car on a d'abord

$$z = t + \alpha^m z', \quad z' = t' + \alpha^l z'', \quad z'' = t'' + \alpha^k z''', \text{ \&c.},$$

et par conséquent

$$z = t + \alpha^m t' + \alpha^{m+l} t'' + \alpha^{m+l+k} t''' + \text{\&c.}$$

Il resterait encore à discuter l'équation *(a)*, dans le cas où l'on a $n > 1$; mais il est évident que ce cas revient à supposer $p = 0$ dans l'équation $\frac{dz}{dx} + pz = \alpha^n Q$. Ainsi, dans ce cas, comme dans celui de $n = 1$, il existe une valeur de z qui satisfait à l'équation *(a)*, et qui ne devient ni zéro ni infinie, quand on fait $\alpha = 0$.

Maintenant nous sommes en droit de conclure, 1.° que la valeur $y = X$ est une solution particulière, toutes les fois que dans l'équation *(a)*, l'exposant n est < 1 ; 2.° que, dans tout autre cas, cette valeur est une intégrale particulière.

(3) Nous avons supposé plus haut,

$$f(x, X + \alpha z) = f(x, X) + \alpha^n z^n P.$$

Si donc on différencie les deux membres de cette équation par rapport

Digitized by Google

à z, et si l'on observe que $\frac{d.f(x, X+\alpha z)}{dz} = \frac{1}{\alpha}\frac{d.f(x,y)}{dy}$, on aura

$$\frac{d.f(x,y)}{dy} = \alpha^{n-1}\frac{d.z^n P}{dz}.$$

Or, en faisant $\alpha = 0$, dans le second membre de cette équation, on aura la valeur de $\frac{d.f(x,y)}{dy}$, qui répond à $y = X$: cette valeur sera donc infinie dans le cas de $n < 1$, et, de plus, elle ne sera infinie que dans ce seul cas ; d'où il résulte ce théorème :

La fonction $\frac{df(x,y)}{dy}$ devient infinie pour toute valeur de y qui satisfait à l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, comme solution particulière ;

Et, réciproquement, quand la fonction $\frac{df(x,y)}{dy}$ devient infinie pour une valeur de y, qui satisfait d'ailleurs à l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, cette valeur est une solution particulière.

(4) Je représente donc par $V = 0$, l'équation $\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{1}{0}$; je différencie cette équation, pour en tirer la valeur de $\frac{dy}{dx}$, valeur que je désigne par U ; je cherche ensuite les facteurs communs aux deux fonctions $U - f(x,y)$ et V : chacun de ces facteurs, égalé à zéro, sera une solution particulière de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Au moyen de cette règle, on pourra trouver toutes les solutions particulières de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, qui renferment la variable y ; mais s'il existait une solution de cette équation, où il n'entrât que la variable x, elle pourrait échapper à la règle que nous venons d'énoncer. Il faudra donc aussi considérer x comme fonction de y, chercher les solutions particulières de l'équation $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ par la règle précédente ; et, de cette manière, on trouvera une seconde fois les solutions particulières où il entre x et y, et, de plus, les solutions qui ne renferment que la variable x.

Digitized by Google

Ces différentes règles, et le théorème du numéro précédent, sur lequel elles sont fondées, sont dus à M. *Laplace*, qui a ainsi résolu le premier, le problème des solutions particulières. (*Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1772.*)

(5) Pour faire usage du théorème du n.° 3, il n'est pas nécessaire que l'équation différentielle dont on cherche les solutions particulières, soit résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$. En effet, représentons $\frac{dy}{dx}$ par p, et soit $V = 0$ l'équation proposée, V désignant une fonction donnée de x, y et p. On pourra considérer p comme une fonction de x et de y, déterminée par cette équation, et l'on aura la différence partielle de cette fonction par rapport à y, en différenciant l'équation $V = 0$ par rapport à y et à p. Cette différence partielle sera donc égale à $-\frac{dV}{dy} : \frac{dV}{dp} = 0$. Ainsi, pour déterminer les solutions cherchées, on aura l'équation

$$\frac{dV}{dy} : \frac{dV}{dp} = \frac{1}{0},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dV}{dp} : \frac{dV}{dy} = 0,$$

qu'il faudra combiner avec $V = 0$.

Si la fonction V est rationnelle, et sans dénominateurs, en sorte que $\frac{dV}{dy}$ ne puisse pas devenir infinie, l'équation $\frac{dV}{dp} : \frac{dV}{dy} = 0$, se réduira à $\frac{dV}{dp} = 0$. Il suffira donc de chercher s'il existe des équations en x et y, qui satisfassent à-la-fois aux deux équations $V = 0$ et $\frac{dV}{dp} = 0$ et c'est à quoi l'on parviendra toujours par de simples éliminations. On obtiendra, de cette manière, toutes les solutions particulières dont l'équation $V = 0$ peut être susceptible.

Il ne faut cependant pas oublier que c'est l'équation $\frac{dV}{dp} : \frac{dV}{dy} = 0$, qui renferme le caractère distinctif des solutions particulières; de sorte qu'en supprimant, comme nous venons de le faire, le diviseur $\frac{dV}{dy}$, on

Digitized by Google

peut obtenir des solutions de l'équation $V = 0$, qui soient seulement des intégrales particulières. Il peut arriver, en effet, que l'équation en y et x, qui satisfait à-la-fois aux deux équations $V = 0$ et $\frac{dV}{dp} = 0$, rende aussi nulle la fonction $\frac{dV}{dy} = 0$; alors, avant de prononcer que cette équation est une solution particulière, il faut examiner si la vraie valeur de la fraction $\frac{dV}{dp} : \frac{dV}{dy}$, qui devient, dans ce cas, $\frac{0}{0}$, est zéro; et, selon que cette vraie valeur est ou n'est pas zéro, l'équation qui rend nulles à-la-fois les trois fonctions $V, \frac{dV}{dp}, \frac{dV}{dy}$, est ou n'est pas une solution particulière.

Remarques sur la nature des Solutions particulières.

(6) Les solutions particulières d'une équation différentielle ne sont autre chose que des facteurs algébriques, que l'on peut mettre en évidence, et séparer entièrement de cette équation par une transformation convenable.

Par exemple, l'équation différentielle

$$x dx + y dy = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}$$

a pour solution particulière, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$; or, si l'on fait $x^2 + y^2 - a^2 = z^2$, cette équation devient

$$x(dz - dx) = 0.$$

Elle se décompose donc en deux autres équations, savoir, $z = 0$, ou la solution particulière; et $dz - dx = 0$, équation différentielle à laquelle la solution particulière ne satisfait plus.

Cette décomposition, que M. *Legendre* a déjà remarquée sur l'exemple même que nous avons choisi (*Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1790, page 226*), peut jeter quelque jour sur la nature des solutions particulières, en ce qu'elle montre bien pourquoi ces solutions ne peuvent être complétées par une constante arbitraire.

Digitized by Google

Au reste, il est bien facile de prouver que cette décomposition est possible pour toute équation différentielle qui admet une solution particulière. En effet, nous avons vu plus haut qu'une pareille équation peut toujours être ramenée à cette forme,

$$dy + y^n P dx = 0,$$

n étant un exposant positif, et < 1, $y = 0$ étant la solution particulière, et P représentant une fonction de x et y, qui ne devient ni zéro ni infinie, quand on fait $y = 0$. Cette équation peut être écrite ainsi,

$$y^n \left(\frac{dy^{1-n}}{1-n} + P dx \right) = 0;$$

et comme $1 - n$ est un exposant positif, si l'on fait $y^{1-n} = z$, la solution particulière $y = 0$ deviendra $z = 0$, et l'on aura, pour l'équation en z,

$$z^{\frac{n}{1-n}} (dz + P dx) = 0,$$

équation qui se décompose visiblement en deux autres, dont l'une se réduit à la solution particulière $z = 0$, et dont l'autre est une équation différentielle, à laquelle cette solution ne satisfait plus.

On voit en même temps qu'il serait impossible de séparer de l'équation $dy + y^n P dx = 0$, la solution $y = 0$, si l'exposant n était plus grand que 1, auquel cas cette solution serait une intégrale particulière.

(7) Si la solution particulière n'était pas connue, et qu'on voulût trouver la transformation propre à la séparer de l'équation différentielle, voici comment il faudrait s'y prendre :

Soit $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ l'équation différentielle proposée. Pour transformer cette équation d'une manière générale, je fais $y = \varphi(x, z)$, φ désignant une fonction quelconque de x et de z, et z étant la nouvelle variable que je veux substituer à y. L'équation en z et x sera

$$\frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} - f(x, \varphi) = 0;$$

et pour que cette équation se décompose en deux facteurs, l'un algébrique

Digitized by Google

et l'autre différentiel, il faut que $\frac{d\varphi}{dz}$ soit facteur de $\frac{d\varphi}{dx} - f(x, \varphi)$. Or, la manière la plus simple de remplir cete condition, c'est de supposer

$$\frac{d\varphi}{dx} - f(x, \varphi) = 0;$$

ce qui revient à prendre pour $y = \varphi(x, z)$, l'intégrale complète de $-\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, z étant la constante arbitraire. Alors, l'équation en z et x se décompose en deux autres,

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \text{ et } dz = 0;$$

et c'est l'équation $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ qui renferme la solution particulière.

Donc, pour avoir la solution particulière de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, il faut prendre la valeur de z dans l'équation $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, et la substituer dans $y = \varphi(x, z)$, c'est-à-dire qu'il faut *différencier l'intégrale complète* $y = \varphi(x, z)$, *par rapport à la constante arbitraire* z, *et éliminer ensuite cette constante, entre les deux équations* $y = \varphi(x, z)$ *et* $\frac{d\varphi}{dz} = 0$.

Tel est, en effet, le principe qui lie les solutions particulières aux intégrales complètes; et l'on voit que notre analyse conduit, d'une manière directe, à la théorie des solutions particulières dont M. *Lagrange* a enrichi le calcul intégral.

Mais il est bon d'observer qu'en éliminant z entre les deux équations $y = \varphi(x, z)$, et $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, l'équation finale ne sera pas toujours une solution particulière de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Il pourra quelquefois arriver que cette équation finale soit simplement un cas particulier de l'intégrale complète $y = \varphi(x, z)$, même quand la valeur de z, tirée de l'équation $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, sera une fonction de x. En effet, si l'on considère l'équation

$$\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0,$$

dans

Digitized by Google

dans laquelle a est une constante quelconque, il est visible qu'on en tirera d'abord $z = a$; et si l'on divise son premier membre par le facteur $(z - a)$, on aura une nouvelle équation qui donnera, en général, une valeur de z en fonction de x.

Lors donc que les deux équations $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ et $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, pourront être satisfaites par une valeur commune de z, ce qui aura lieu toutes les fois que l'équation $\varphi(x, z) - \varphi(x, a) = 0$, résolue par rapport à z, aura des racines égales; en substituant cette valeur commune de z, dans $y = \varphi(x, z)$, au lieu d'une solution particulière, on aura l'intégrale particulière $y = \varphi(x, a)$.

(8) Nous venons de voir qu'on pouvait toujours, par un changement de variables, délivrer une équation différentielle proposée de sa solution particulière, si elle en admet une. Réciproquement, on peut introduire dans cette équation différentielle, telle solution particulière que l'on voudra, en la multipliant par un facteur renfermant la solution particulière, et en effectuant ensuite un certain changement de variables. Si l'on fait le même changement dans l'intégrale de la proposée, on obtiendra l'intégrale de la nouvelle équation différentielle: or, par cette transformation, l'intégrale ne fera que changer de forme, et n'acquerra aucun nouveau facteur; d'où il suit qu'elle ne renfermera pas la solution introduite dans la proposée; mais il est curieux de voir comment cette solution, qu'on a choisie arbitrairement, pourra toujours se déduire de l'intégrale par la variation de la constante arbitraire.

Soit donc $dy - p\,dx = 0$ une équation différentielle, dans laquelle p est une fonction donnée de x et de y. Soit u une autre fonction des mêmes variables, prise arbitrairement, et multiplions l'équation précédente par u, ce qui donne $u\,dy - up\,dx = 0$. Représentons par z une nouvelle variable, fonction de x et y, dont la différentielle relative à y, soit $u\,dy$; sa différentielle relative à x, sera $dx \cdot \int \frac{du}{dx}\,dy$, et l'on aura $dz = u\,dy + dx \cdot \int \frac{du}{dx}\,dy$; en sorte que l'équation $u\,dy - up\,dx = 0$

Digitized by Google

deviendra $dz - dx\left(up + \int \frac{du}{dx}\, dy\right) = 0$ *(m)*.

En intégrant la différentielle totale de z, on aura la valeur de z en fonction de x et y, et par suite la valeur de y en fonction de x et z; substituant cette valeur dans l'équation *(m)*, on aura une équation différentielle à deux variables x et z, qui sera satisfaite par toutes les équations algébriques qui satisfaisaient à la proposée $dy - p\,dx = 0$, et, en outre, par la solution particulière $u = 0$.

Maintenant, soit $y = f(x, a)$ l'intégrale de $dy - p\,dx = 0$, a étant la constante arbitraire; en mettant dans cette intégrale, pour y sa valeur en x et z, on aura l'intégrale de l'équation *(m)*; mais si l'on veut déduire de cette intégrale les solutions particulières de l'équation *(m)*, par la règle du numéro précédent, il faut observer que cette règle suppose que l'intégrale soit résolue par rapport à l'une des variables, sans quoi l'on pourrait ne pas obtenir toutes les solutions particulières. Si, par exemple, l'intégrale était résolue par rapport à la constante arbitraire, la variation de cette constante ne donnerait aucune des solutions cherchées. Il faudra donc, après avoir substitué pour y sa valeur en x et z, résoudre l'équation $y = f(x, a)$ par rapport à z; ce qui donnera le même résultat que si l'on substituait $f(x, a)$ au lieu de y, dans la valeur de z en fonction de x et y, valeur que l'on a obtenue en intégrant la différentielle totale $dz = u\,dy + dx \cdot \int \frac{du}{dx} dy$. De cette manière, on aura l'intégrale de l'équation *(m)*, sous la forme $z = F(x, a)$, et l'on en pourra déduire les solutions particulières, par la variation de la constante a.

Il est facile de voir que ce procédé donnera pour l'équation *(m)* la solution $u = 0$, et, en outre, la solution que pouvait avoir la proposée $dy - p\,dx = 0$. En effet, la fonction $F(x, a)$, dont il faut prendre la différentielle relative à a pour l'égaler ensuite à zéro, résultant de la valeur de z en x et y, dans laquelle on a mis $f(x, a)$ au lieu de y, et ne renfermant a que par suite de cette substitution, il s'ensuit qu'on aura $\frac{dF}{da} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{df}{da}$. Égalant à zéro, et observant

Digitized by Google

que $\frac{dz}{dy} = u$, on aura $u\frac{df}{da} = 0$; équation qui se décompose en deux autres, $u = 0$ et $\frac{df}{da} = 0$: la première donne la solution $u = 0$, que l'on a choisie arbitrairement; et en éliminant a entre la seconde et $y = f(x, a)$, ou bien entre la seconde et $z = F(x, a)$, on aura en x et y ou en x et z la solution particulière de l'équation $dy - p\,dx = 0$, si toutefois cette équation en admet une.

(9) On sait que dans la théorie des courbes, la solution particulière d'une équation différentielle représente la ligne de contact des courbes contenues dans l'intégrale complète de cette même équation. Or, toutes ces courbes provenant d'une équation qui renferme un seul paramètre, constant pour une même courbe, et variable d'une courbe à l'autre, il s'ensuit qu'elles sont absolument déterminées de forme et de position; que par conséquent la courbe de contact est aussi déterminée; et l'on ne voit pas d'abord comment il arrive qu'on puisse supprimer ou introduire à volonté une solution particulière. Pour s'en rendre raison, il suffit d'observer que si l'on fait dans l'intégrale un changement de variables qui ne soit pas un simple changement de coordonnées, c'est-à-dire, si l'on substitue à la place de l'une des variables y une fonction non linéaire de l'autre variable x et d'une nouvelle variable z, et que l'on construise cette intégrale transformée, en prenant pour coordonnées x et z et pour paramètre variable la constante arbitraire, on aura une suite de courbes différentes de celles qui correspondaient à l'intégrale en x et y. Il pourra donc arriver que ces nouvelles courbes n'aient aucune ligne de contact, et alors la solution particulière aura disparu. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, si ces nouvelles courbes étaient une suite de droites parallèles, une suite de cercles concentriques, &c. Réciproquement il se sera introduit une solution particulière, lorsque la suite de courbes qui correspondaient à l'intégrale en x et y, n'ayant aucune ligne de contact, la même circonstance n'aura plus lieu pour les courbes qui correspondent à l'intégrale en x et z.

Digitized by Google

J'ai appliqué ces considérations générales à des exemples ; mais je n'en rapporterai point ici les calculs, pour ne pas m'écarter davantage du but principal de ce Mémoire.

ARTICLE DEUX.

Solutions particulières des Équations aux différences du premier ordre.

(10) Nous avons fait voir, dans un autre Mémoire, qu'en général une équation aux différences admet une infinité d'intégrales distinctes, renfermant chacune une constante arbitraire, et qui peuvent toutes être réunies dans une seule équation, au moyen d'une ou plusieurs fonctions arbitraires ; mais cette équation, qu'on peut appeler *l'intégrale générale*, ne renferme pas encore toutes les solutions de l'équation aux différences, et il existe pour ce genre d'équations, comme pour les équations différentielles, des solutions particulières, c'est-à-dire, des équations en x et y, qui satisfont à l'équation aux différences, et qui ne peuvent être complétées par une constante arbitraire. C'est de ce genre de solutions que nous allons principalement nous occuper dans cet article.

(11) Le théorème du numéro (3) a également lieu pour les équations aux différences. Soit, en effet, l'équation $\Delta y = f(x, y, \Delta x)$, dans laquelle, pour plus de généralité, la différence Δx est supposée une fonction quelconque de x, on démontrera, comme on l'a fait pour les équations différentielles (numéros 1, 2, 3),

1.° Que toute valeur de y en fonction de x, qui satisfait en même temps aux deux équations $\Delta y = f(x, y, \Delta x)$ et $\frac{df(x, y, \Delta x)}{dy} = \frac{1}{0}$, ne peut être qu'une solution particulière de l'équation $\Delta y = f(x, y, \Delta x)$;

2.° Que réciproquement, pour qu'une valeur de y en fonction de x, soit une solution particulière de $\Delta y = f(x, y, \Delta x)$, il faut qu'elle satisfasse à-la-fois à cette équation et à l'équation $\frac{df(x, y, \Delta x)}{dy} = \frac{1}{0}$.

(12) Prenons, pour faire une application de ce théorème, l'équation

$$y + \frac{4}{3}\Delta y - \frac{4}{9}(64)^x \cdot (\Delta y)^3 = 0, \ldots (1),$$

Digitized by Google

dans laquelle la différence Δx est égale à l'unité ; et proposons-nous de trouver les solutions particulières que cette équation peut admettre. En la résolvant par rapport à Δy, on obtient ces trois valeurs,

$$\Delta y = u + v, \quad \Delta y = \alpha u + \alpha^2 v, \quad \Delta y = \alpha^2 u + \alpha v,$$

dans lesquelles α et α^2 représentent les racines cubiques imaginaires de l'unité, et où l'on a fait, pour abréger,

$$\sqrt[3]{\left[\frac{9}{8}\cdot\frac{y}{(64)^x} + \sqrt{\left(\frac{81}{64}\cdot\frac{y^2}{(64)^{2x}} - \frac{1}{(64)^{3x}}\right)}\right]} = u,$$

$$\sqrt[3]{\left[\frac{9}{8}\cdot\frac{y}{(64)^x} - \sqrt{\left(\frac{81}{64}\cdot\frac{y^2}{(64)^{2x}} - \frac{1}{(64)^{3x}}\right)}\right]} = v.$$

En différenciant ces valeurs de Δy par rapport à y, on trouve

$$\frac{d.\Delta y}{dy} = \frac{3(u+v)}{8\sqrt{\left(\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x}\right)}},$$

$$\frac{d.\Delta y}{dy} = \frac{3(\alpha u + \alpha^2 v)}{8\sqrt{\left(\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x}\right)}},$$

$$\frac{d\Delta y}{dy} = \frac{3(\alpha^2 u + \alpha v)}{8\sqrt{\left(\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x}\right)}},$$

quantités qui deviennent toutes trois infinies, en vertu de l'équation $\frac{81}{64}y^2 - \frac{1}{(64)^x} = 0$.

Or, on satisfait à cette équation, soit en prenant $y = \pm\frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}\right)^x$, soit en prenant $y = \pm\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x$; mais $y = \pm\frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}\right)^x$ ne s'accorde avec aucune des trois valeurs ci-dessus de Δy, tandis que $y = \pm\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x$ satisfait aux deux équations $\Delta y = \alpha u + \alpha^2 v$ et $\Delta y = \alpha^2 u + \alpha v$; ce qu'il est facile de vérifier, en observant que $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$. La double valeur

$$y = \pm\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x$$

est donc une solution particulière de l'équation (1), et de plus elle est la seule que cette équation puisse admettre.

Digitized by Google

Ainsi, nous sommes certains que la solution $y \pm \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x = 0$, ne saurait être comprise dans aucune des intégrales complètes en nombre infini de l'équation (1); et si l'on pouvait obtenir l'intégrale générale de cette équation, il faudrait encore y joindre $y \pm \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x = 0$, pour avoir toutes les solutions possibles du problème qui a conduit à l'équation (1).

(13) On peut trouver les solutions particulières de l'équation (1), sans être obligé de résoudre cette équation par rapport à Δy, comme nous venons de le faire. Il faut pour cela considérer Δy, comme une fonction de x et de y donnée par l'équation (1), et différencier cette équation par rapport à y et Δy, afin d'obtenir la différence partielle $\frac{d.\Delta y}{dy}$, dont la valeur doit devenir infinie dans le cas des solutions particulières. On trouve, par ce moyen,

$$\frac{d.\Delta y}{dy} = \frac{3}{4[(64)^x(\Delta y)^2 - 1]},$$

valeur qui ne peut devenir infinie qu'en vertu de l'équation

$$(64)^x(\Delta y)^2 - 1 = 0.$$

En éliminant Δy entre cette équation et l'équation (1), il vient

$$\frac{81}{64}y^2(64)^x - 1 = 0,$$

équation que nous avons trouvée plus haut, et qui nous a donné $y = \pm\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x$ pour solution particulière de l'équation (1); et, en effet, cette double valeur de y satisfait en même temps à l'équation (1) et à l'équation $(64)^x(\Delta y)^2 - 1 = 0$.

(14) Les solutions particulières des équations aux différences, se déduisent des intégrales complètes par la variation de la constante arbitraire; cela est analogue à ce qui a lieu pour les solutions particulières des équations différentielles; mais dans le cas des équations aux différences, l'équation qu'on obtient en faisant varier la constante arbitraire, est elle-même une équation aux différences, dont il faut

Digitized by Google

trouver les solutions particulières; en sorte que la connaissance d'une intégrale complète ne simplifie en rien la recherche des solutions particulières, et il est toujours indispensable de recourir au théorème du (numéro 11). Nous prendrons encore pour exemple l'équation (1) du (numéro 12), dont

$$y - \frac{a}{4^x} + \frac{3}{16}a^3 = 0$$

est une intégrale complète a étant la constante arbitraire.

Si l'on considère a dans cette équation comme une fonction de x, et que l'on détermine cette fonction de manière que la valeur de Δy reste la même que dans l'hypothèse de a constante, cette équation satisfera encore à l'équation (1). On aura, pour déterminer cette valeur de a, l'équation

$$\Delta a\left(-\frac{1}{4^{x+1}} + \frac{9}{16}a^2 + \frac{9}{16}a(\Delta a) + \frac{3}{16}(\Delta a^2)\right) = 0,$$

qui se décompose en deux autres,

$$\Delta a = 0 \text{ et } (\Delta a)^2 + 3a(\Delta a) + 3a^2 - \frac{4}{3\cdot 4^x} = 0.$$

On satisfait à l'équation $\Delta a = 0$, en prenant pour a une fonction arbitraire de cos. $2\pi x$ et sin. $2\pi x$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre; d'où il résulte que l'on peut remplacer par une pareille fonction la constante arbitraire contenue dans l'intégrale complète ci-dessus; et il en faudrait dire autant de toute autre intégrale complète de l'équation (1).

Si l'on connaissait une intégrale complète de l'équation

$$(\Delta a)^2 + 3a.\Delta a + 3a^2 - \frac{4}{3\cdot 4^x} = 0, \quad (2),$$

on en tirerait une valeur de a en fonction de x et d'une nouvelle constante arbitraire : en substituant donc cette valeur de a dans $y - \frac{a}{4^x} + \frac{3}{16}a^3 = 0$, on aurait une seconde intégrale complète de l'équation (1); mais pour obtenir les solutions particulières de cette équation (1), il faut substituer dans l'intégrale précédente une

Digitized by Google

valeur de a qui soit sans constante arbitraire, et qui par conséquent ne peut être qu'une solution particulière de l'équation (2). Or, après avoir résolu cette équation par rapport à Δa, on trouve, au moyen du théorème du (numéro 11), qu'elle a pour solution particulière

$$a = \pm \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^x;$$

d'où il suit pour l'équation (1), la solution $y = \pm \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^x$, que nous avons déjà trouvée. En faisant varier de même la constante arbitraire dans toute autre intégrale complète de l'équation (1), qui serait connue, on obtiendrait la solution particulière dont cette équation est susceptible; mais pour vérifier cette assertion dans toute son étendue, et pour vérifier en même temps que la solution particulière n'est comprise dans aucune des intégrales complètes, il faudrait connaître toutes ces intégrales, et je n'ai pu en découvrir aucune autre que $y - \frac{a}{4^x} + \frac{3}{16}a^3 = 0$. Il n'en est pas moins vrai que l'équation (1) a une infinité d'autres intégrales complétées chacune par une constante arbitraire; seulement il arrive que ces intégrales dépendent d'équations aux différences, que l'on ne peut intégrer par les méthodes connues jusqu'ici; peut-être même est-il impossible que ces intégrales soient représentées sous forme finie.

(15) Il se présente une manière fort simple de satisfaire à l'équation (2), par une infinité de valeurs de a en fonction de x, et sans constantes arbitraires. En effet, si l'on met $z\left(\frac{1}{2}\right)^x$ à la place de a dans cette équation, et que l'on fasse $z + \Delta z = z'$, elle devient,

$$\frac{z'^2}{4} + \frac{zz'}{2} + z^2 - \frac{4}{3} = 0.$$

Or, on sera toujours sûr de satisfaire à cette équation, en prenant pour z une fonction de cette forme,

$$z = A_1\alpha_1^x + A_2\alpha_2^x + A_3\alpha_3^x + \ldots\ldots A_n\alpha_n^x,$$

dans laquelle α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ désignent les n racines $n.^{ièmes}$ de l'unité, y compris

Digitized by Google

compris l'unité elle-même, et où $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, représentent des coëfficiens indépendans de x.

Cela suppose que l'on regarde x comme un nombre entier ; et alors si l'on subtitue la valeur de z dans le premier nombre de l'équation précédente, le résultat de cette substitution ne renfermera, en vertu des propriétés connues des racines de l'unité, qu'un nombre n d'exponentielles distinctes ; par conséquent, si l'on égale à zéro la somme des termes qui multiplient chacune des exponentielles, on aura un nombre n d'équations qui serviront à déterminer les valeurs des coëfficiens A_1, A_2, A_3, &c.

Si l'on prend successivement pour n tous les nombres possibles, et que l'on calcule à chaque fois les valeurs des coëfficiens A_1, A_2, A_3, &c., on aura pour z autant de valeurs que l'on voudra. Ces différentes valeurs de z, multipliées par $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, donneront les valeurs correspondantes de a, lesquelles étant substituées dans $y - \frac{a}{4^x} + \frac{3}{16}a^3 = 0$, donneront autant de valeurs de y qui satisferont toutes à l'équation (1) du numéro (12) ; et si l'on applique à cette équation la méthode d'approximation du numéro 2, on complétera chaque valeur de y par une constante arbitraire, et l'on aura, sous forme de séries, une infinité d'intégrales complètes de l'équation (1).

(16) L'équation $\frac{z'^2}{4} + \frac{z'z}{2} + z^2 - \frac{4}{3} = 0$ n'est pas la seule à laquelle on puisse satisfaire par une fonction des racines de l'unité affectées d'exposans variables. Toute équation aux différences, de quelque ordre qu'elle soit, dans laquelle la variable dont la différence est constante manque, est susceptible d'une pareille solution. Si l'on a, par exemple, l'équation de l'ordre m,

$$(ay + by_{x+1} + cy_{x+2} + dy_{x+3} + \ldots\ldots ky_{x+m})^2 = 1 ;$$

dans laquelle $y_x, y_{x+1} \ldots y_{x+m}$ représentent les valeurs de la fonction y, qui répondent à $x + 1$, $x + 2, \ldots x + m$; on trouve, avec un

Digitized by Google

peu d'attention, que l'on y satisfait en prenant

$$y = \frac{1}{a+b+c\ldots+k} - \frac{2}{n}\left(\frac{1}{a+b+c\ldots+k} + \frac{\alpha^x}{a+b\alpha+c\alpha^2\ldots+k\alpha^m} + \frac{\alpha^{2x}}{a+b\alpha^2+c\alpha^4\ldots\ldots+k\alpha^{2m}} + \frac{\alpha^{3x}}{a+b\alpha^3+c\alpha^6+\ldots k\alpha^{3m}} \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots + \frac{\alpha^{(n-1)x}}{a+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{2(n-1)}\ldots+k\alpha^{m(n-1)}}\right);$$

formule dans laquelle on peut prendre pour n un nombre premier quelconque, et où l'on a représenté par α l'une quelconque des racines imaginaires de l'unité de l'ordre n; en sorte que α^2, α^3, $\ldots\alpha^{n-1}$ sont les $n-2$ autres racines imaginaires de cet ordre.

Cette valeur de y n'est pas la plus générale qui puisse satisfaire à l'équation précédente. Pour obtenir son intégrale générale (*), il faut extraire la racine carrée de ses deux membres, et prendre $(-1)^X$, au lieu de ± 1, X désignant une fonction de x, assujettie à la seule condition d'être un nombre entier pour toutes les valeurs entières de x. De cette manière, l'équation précédente devient

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + dy_{x+3}\ldots + ky_{x+m} = (-1)^X,$$

dont l'intégrale est de cette forme

$$y = Ag^x\Sigma\frac{(-1)^X}{g^x} + A_1g_1^x\Sigma\frac{(-1)^X}{g_1^x} + \ldots A_{m-1}g_{m-1}^x\Sigma\frac{(-1)^X}{g^x{}_{m-1}};$$

$g, g_1, g_2\ldots g_{m-1}$ représentant les m racines de l'équation

$$a + bg + cg + \ldots\ldots + kg^m = 0,$$

et $A, A_1, A_2, \ldots A_{m-1}$ étant des fonctions déterminées de ces racines.

(17) Il est facile de se rendre raison de la multiplicité des intégrales complètes dont les équations aux différences de tous les ordres sont susceptibles. Il faut pour cela se représenter une équation aux différences, dans laquelle Δx est constant, comme le type d'un nombre indéfini d'équations qu'on déduirait de celle-là, en donnant à x une suite de valeurs en progression arithmétique. Le premier terme de cette progression est arbitraire : pour fixer les idées, nous le supposerons zéro,

(*) *Voyez* dans le onzième cahier de ce journal, le mémoire cité au commencement de cet article.

Digitized by Google

et nous ferons $\Delta x = 1$. Soit alors

$$f(x, y_x, y_{x+1}, \ldots\ldots y_{x+m}) = 0$$

une équation aux différences de l'ordre quelconque m, si l'on met successivement à la place de x dans cette équation 0, 1, 2, 3,... &c., on aura

$$\begin{aligned} &f(0, y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m) = 0 \\ &f(1, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{m+1}) = 0 \qquad (f) \\ &f(2, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots y_{m+2}) = 0 \\ &\quad \text{&c.} \end{aligned}$$

et, au moyen de ces équations, on pourra toujours déterminer un terme quelconque de la suite $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ &c., en fonction des m premiers termes de cette suite. Lorsque les valeurs de ces premiers termes seront données, que, de plus, le rang du terme qu'on cherche sera déterminé, on calculera la valeur de ce terme, par les seules règles de la résolution des équations numériques.

Cela posé, intégrer l'équation $f(x, y_x, y_{x+1}, \text{&c.}) = 0$, c'est trouver l'expression du terme général y_x de la suite y_0, y_1, y_2, &c., en fonction de x et des m premiers termes $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{m-1}$, lesquels premiers termes sont les constantes arbitraires de l'intégrale.

Or, si cette équation est du degré n par rapport à y_{x+m}, la première des équations (f) donnera n valeurs de y_m; en combinant les deux premières équations, et éliminant entre elles y_m, l'équation finale donnera n^2 valeurs de y_{m+1}; en combinant de même les trois premières équations, pour éliminer y_m et y_{m+1}, l'équation finale donnera n^3 valeurs de y_{m+2}; et en continuant ainsi, on voit que l'on aurait pour y_x un nombre de valeurs marqué par n^{x+1-m}. C'est à cette multiplicité de valeurs de y_x que sont dues les fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale de $f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \text{&c.}) = 0$, lorsque cette équation n'est pas linéaire; et l'on voit que ces fonctions doivent être telles qu'elles n'aient, pour chaque valeur déterminée de x, qu'un nombre limité de valeurs différentes, c'est-à-dire, un nombre de valeurs marqué par n^{x+1-m}.

Si l'on suppose que l'équation $f(x, y_x, y_{x+1} \ldots \text{&c.}) = 0$ est donnée sous forme rationnelle, et si l'on élimine $y_m, y_{m+1}, y_{m+2} \ldots y_{x-2}, y_{x-1}$,

Digitized by Google

entre les équations *(f)* depuis la première jusqu'à celle qui renferme y_x, on aura une équation entre x et y_x, et les constantes arbitraires $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$, que je désignerai par

$$F(x, y_x, y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{m-1}) = 0,$$

et qui sera l'intégrale générale de l'équation $f(x, y_x, y_{x+1} \ldots$ &c.$) = 0$ exprimée sous forme rationnelle et sans fonctions arbitraires. Mais il faut observer que cette équation renferme la variable y_x, affectée d'un exposant indéterminé et qui dépend de x; de sorte que si on la résolvait par rapport à y_x, on obtiendrait un nombre variable de racines; et si on les voulait comprendre toutes dans une formule générale, il faudrait nécessairement employer des fonctions de forme indéterminée.

ARTICLE TROIS.

Solutions particulières des Équations différentielles et des Équations aux différences des ordres supérieurs au premier.

(18) Occupons-nous maintenant des équations d'un ordre supérieur au premier; et, pour traiter à-la-fois les équations différentielles et les équations aux différences, considérons l'équation

$$f(x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n)}) = 0,$$

dans laquelle $y', y'', y''' \ldots\ldots y^{(n)}$ désignent, ou les coéfficiens différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}$, ou les différences $\Delta y, \Delta^2 y \ldots \Delta^n y$; en sorte que cette équation représente en même temps une équation différentielle et une équation aux différences de l'ordre quelconque n.

Pour obtenir les solutions particulières de l'ordre $n - 1$ que cette équation peut admettre, ou pour s'assurer qu'il n'en existe pas, il faut la résoudre par rapport à $y^{(n)}$, différencier la valeur de $y^{(n)}$ par rapport à $y^{(n-1)}$; et les valeurs de $y^{(n-1)}$ qui rendront infinie la différence partielle $\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}}$, en même temps qu'elles satisferont à l'équation proposée, seront les solutions particulières de cette équation.

Cette règle résulte du théorème du numéro (3), que l'on peut étendre aux équations différentielles et aux différences d'un ordre quelconque,

Digitized by Google

lorsqu'il s'agit de trouver leurs solutions particulières de l'ordre immédiatement inférieur.

Si l'on voulait éviter de résoudre l'équation de l'ordre n par rapport à $y^{(n)}$, il faudrait considérer $y^{(n)}$ comme une fonction de $x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ déterminée par cette équation, que l'on différencierait par rapport à $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$, afin d'avoir la valeur de la différence partielle $\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}}$. De cette manière, on trouve $\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}} = -\frac{df}{dy^{(n-1)}} : \frac{df}{dy^{(n)}}$. Donc, si l'équation $f(x, y, y', y'' \ldots) = 0$ est donnée sous forme rationnelle et sans dénominateur, en sorte que $\frac{df}{dy^{(n-1)}}$ ne puisse pas devenir infinie, la condition $\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}} = \frac{1}{0}$ se réduira à $\frac{df}{dy^{(n)}} = 0$. Donc, pour avoir les solutions particulières de l'ordre $n - 1$ de l'équation $f(x, y, y', y'' \ldots\ldots) = 0$, il faudra chercher les équations de l'ordre $n - 1$ qui satisfont à-la-fois aux deux équations $f(x, y, y', y'' \ldots) = 0$ et $\frac{df}{dy^{(n)}} = 0$. Or pour trouver ces équations, on éliminera $y^{(n)}$ entre $f(x, y, y', y'' \ldots) = 0$ et $\frac{df}{dy^{(n)}} = 0$, ce qui donnera une équation de l'ordre $n - 1$, que je représente par $V = 0$; on prendra la différentielle ou la différence de $V = 0$, selon que $f(x, y, y', y'' \ldots\ldots) = 0$ sera une équation différentielle ou aux différences; au moyen de $dV = 0$ ou de $\Delta V = 0$ on éliminera $y^{(n)}$ dans $f(x, y, y', y'' \ldots) = 0$, et l'on aura une seconde équation de l'ordre $n - 1$ que je représente par $U = 0$; enfin, on cherchera les facteurs de l'ordre $n - 1$ communs aux deux fonctions U et V: ces facteurs égalés à zéro, donneront toutes les solutions particulières cherchées.

Mais, avant d'assurer que l'équation provenant de l'un de ces facteurs, est effectivement une solution particulière, il faudra examiner si la fonction $\frac{df}{dy^{(n-1)}}$ ne devient pas nulle en vertu de cette équation. Lorsque cette fonction deviendra nulle, la valeur de $\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}}$, ou la

Digitized by Google

fraction $\frac{df}{dy^{(n-1)}} : \frac{df}{dy^{(n)}}$, se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$; par conséquent il sera possible que sa vraie valeur ne soit pas infinie, auquel cas le facteur commun aux deux fonctions U et V ne donnera point une solution, mais seulement une intégrale particulière de l'équation $f(x, y, y', y'' \ldots\ldots) = 0$.

(19) Le théorème de M. *Laplace*, démontré dans le numéro 3, suffit, comme on voit, pour trouver, quel que soit l'ordre d'une équation différentielle ou aux différences, les solutions particulières de l'ordre immédiatement inférieur; mais si l'on demande les solutions particulières d'un ordre inférieur de deux, de trois, &c. unités, et enfin les solutions algébriques ou sans différences, il faudra de nouveaux théorèmes et de nouvelles règles pour les déterminer.

Pour fixer les idées, considérons d'abord une équation du second ordre; il sera facile ensuite de généraliser les résultats auxquels nous parviendrons.

Soit donc $y'' = f(x, y, y')$ une équation quelconque du second ordre résolue par rapport à y'', et supposons que l'on satisfasse à cette équation par une valeur de y en fonction de x, telle que $y = X$: il s'agit de reconnaître si cette valeur de y est une solution particulière algébrique ou sans différences de la proposée.

Ce que nous entendons ici par une solution particulière *algébrique ou sans différences*, c'est une valeur de y en fonction de x, ou plus généralement une équation en y et x, qui satisfait à la proposée, et qui ne peut être complétée ni par deux, ni même par une constante arbitraire: une équation en y et x qui pourrait être complétée par deux constantes arbitraires, ne serait qu'un cas particulier de l'intégrale complète algébrique; une équation en y et x qui ne pourrait être complétée que par une seule constante arbitraire, serait nécessairement comprise, comme cas particulier, dans l'intégrale complète d'une solution particulière du premier ordre.

Cela posé, la valeur $y = X$, peut satisfaire à l'équation $y'' = f(x, y, y')$, de deux manières qu'il est nécessaire de distinguer: 1.° en donnant

Digitized by Google

pour y'' et $f(x, y, y')$ deux fonctions identiques de x; 2.° parce qu'en substituant dans $f(x, y, y')$, X et X', à la place de y et y', cette fonction devient $\frac{0}{0}$. Examinons d'abord le premier cas.

Si la fonction X est comprise dans une valeur plus générale de y, on a déjà vu que cette valeur pourra être représentée par $y = X + z\alpha$, α étant une constante arbitraire, et z étant une fonction de x et de α qui ne devient ni zéro ni infinie quand on fait $\alpha = 0$. J'essaie donc si l'on peut satisfaire à la proposée au moyen de cette valeur générale, et pour cela je la substitue dans $f(x, y, y')$; puis je sépare dans cette fonction la partie indépendante de z, elle devient alors

$$f(x, y, y') = f(x, X, X') + \alpha^n P,$$

α^n étant une puissance positive de α, et la plus haute qui puisse diviser $f(x, y, y') - f(x, X, X')$, en sorte que P représente ici une fonction de x, z, z', et α, qui ne devient ni zéro ni infinie quand on fait $\alpha = 0$.

X'' et $f(x, X, X')$ étant par la supposition deux fonctions identiques de x, l'équation $y'' = f(x, y, y')$ devient

$$\alpha z'' = \alpha^n P,$$

quand on y substitue $X + \alpha z$ à la place de y, et par conséquent $X' + \alpha z'$ et $X'' + \alpha z''$ à la place de y' et y''.

Je sépare de nouveau dans P la partie indépendante de α; je représente cette partie par p; qui sera une fonction de x, z et z', homogène et de dimension n par rapport à z et z'; enfin je fais $P = p + \alpha^m Q$, en désignant par α^m la plus haute puissance de α qui soit facteur de $P - p$, et par Q une fonction de x, α, z et z', qui ne devient ni zéro ni infinie quand on fait $\alpha = 0$. L'équation précédente devient

$$\alpha z'' = \alpha^n p + \alpha^{n+m} Q \ (a);$$

et la question est réduite, comme dans le cas des solutions particulières des équations du premier ordre, à chercher s'il existe une valeur de z en fonction de x et α, qui satisfasse à cette équation, et qui ne devienne ni zéro ni infinie pour la valeur $\alpha = 0$.

Digitized by Google

Or, si l'exposant n est < 1, et qu'en même temps p ne renferme pas z', ensorte que p soit de la forme $p_{,} z^{n}$, $p_{,}$ étant une fonction de x, je dis que la valeur convenable de z n'existe pas; car en divisant les deux membres de l'équation *(a)* par α^{n}, et faisant ensuite $\alpha = 0$, il vient $p_{,} z^{n} = 0$, ou simplement $z = 0$, équation impossible, puisque z est une fonction de x et de α qui ne devient pas nulle quand on fait $\alpha = 0$. Donc lorsque ces deux circonstances $n < 1$ et z' manquant dans p, ont lieu à-la-fois, il en faut conclure que la valeur $y = X$ est une solution particulière algébrique de l'équation $y'' = f(x, y, y')$.

Dans tout autre cas, on tirera de l'équation *(a)*, par la méthode du numéro (2), une valeur de z en fonction de x et de α, qui ne deviendra ni zéro ni infinie pour la valeur $\alpha = 0$; d'où il suit que la valeur $y = X$ n'est une solution particulière algébrique de l'équation $y'' = f(x, y, y')$, que dans le seul cas où l'on a $n < 1$, et où p ne renferme pas z'.

(20) Pour appliquer la méthode du numéro (2) à l'équation *(a)*, je suppose d'abord $n = 1$; je représente par t la partie de z, indépendante de α; et pour déterminer t, je fais $\alpha = 0$, dans l'équation *(a)*, après avoir divisé ses deux membres par α, ce qui donne

$$t'' - \pi = 0,$$

π étant ce que devient p quand on y met t et t' à la place de z et z'.

La valeur de t étant déterminée, je représente par $t + \alpha^{m} u$ la valeur exacte de z; je substitue cette valeur dans la fonction p, qui prend alors cette forme $p = \pi + [(p_{,} u + p_{,,} u')_{,} + K]\, \alpha^{m}$, $p_{,}$ et $p_{,,}$ désignant les différences partielles $\frac{dp}{dz}$ et $\frac{dp}{dz'}$, dans lesquelles on a mis t et t' au lieu de z et z', et K représentant une fonction de x, u, u' et α, qui devient nulle en même temps que α.

De plus je désigne par q, ce que devient Q quand on y fait $\alpha = 0$. Enfin, je fais pour abréger $K + Q - q = \alpha^{l} R$, α^{l} étant la plus haute puissance de α, qui soit facteur de $K + Q - q$, et R représentant une

Digitized by Google

une fonction de x, u, u' et α, qui ne devient ni zéro ni infinie pour la valeur $\alpha = 0$.

Par suite de ces suppositions, et à cause de $\pi = t''$, l'équation *(a)* devient, en divisant par α^m

$$u'' - p_{,}u - p_{,,}u' = q + \alpha^{l} R.$$

Maintenant la marche du calcul sera absolument la même que dans le numéro (2); on trouvera, pour déterminer les différens termes de la valeur de u, une suite d'équations linéaires du deuxième ordre, et la valeur de u étant connue, on aura celle de z au moyen de $z = t + \alpha^m u$; puis celle y au moyen de $y = X + \alpha^n z$.

Le cas où l'exposant n surpasse l'unité, revient à supposer $p = 0$ dans l'équation *(a)*, ou bien à réunir les deux termes $p\alpha^x + Q\alpha^{x+n}$ en un seul de la forme $Q\alpha^x$; le calcul alors se fera comme dans le cas précédent.

Lorsqu'on a $n < 1$ et que p renferme z', il est encore très-facile d'appliquer à l'équation *(a)* la méthode du numéro (2); on trouvera que t, ou la partie de la valeur z, indépendante de α, est donnée par une équation du premier ordre, homogène par rapport à t et t'; et que les autres termes de la valeur de z, sont donnés par une suite d'équations linéaires et du premier ordre.

Au reste, ce cas de $n < 1$ est celui dans lequel la valeur de y ne peut être complétée que par une seule constante arbitraire; tandis que le cas de $n = 1$, ou de $n > 1$, est celui où cette valeur peut être complétée par deux constantes arbitraires.

(21) Nous avons supposé dans le numéro (19) que $f(x, y, y')$ devenait $f(x, X, X') + \alpha^s P$, quand on y substitue $X + \alpha z$, et $X' + \alpha z'$ à la place de z et z'; et nous avons représenté par $P + \alpha^m Q$, la valeur de P, p étant la partie de cette valeur indépendante de α; on a donc

$$f(x, X + \alpha z, X' + \alpha z') = f(x, X, X') + \alpha^n p + \alpha^{n+m} Q.$$

Différenciant cette équation successivement par rapport à z et à z', et

Digitized by Google

observant que

$$\frac{df(x, X + \alpha z, X' + \alpha x')}{dz} = \alpha . \frac{df(x, y, y')}{dy},$$

et que

$$\frac{df(x, X + \alpha z, X' + \alpha z')}{dz'} = \alpha . \frac{df(x, y, y')}{dy'},$$

on aura

$$\alpha \frac{df}{dy} = \alpha^n \frac{dp}{dz} + \alpha^{n+m} \frac{dQ}{dz},$$

$$\alpha \frac{df}{dy'} = \alpha^n \frac{dp}{dz'} + \alpha^{n+m} \frac{dQ}{dz'},$$

en ne retenant que la lettre f pour désigner la fonction $f(x, y, y')$.

Divisant par α, et faisant ensuite $\alpha = 0$, on aura les valeurs de $\frac{df}{dy}$ et $\frac{df}{dy'}$, qui se rapportent à $y = X$. Or il est visible que si n est < 1, la valeur de $\frac{df}{dy}$ sera infinie. Si p ne renferme pas z', la valeur de $\frac{df}{dy'}$ sera finie ou infinie, selon qu'on aura $n + m > 1$ ou $n + m < 1$; mais le rapport $\frac{df}{dy} : \frac{df}{dy'}$ sera toujours infini. Donc pour que $y = X$ soit une solution particulière algébrique de l'équation $y'' = f(x, y, y')$, il faut que, pour cette valeur de y, on ait en même temps $\frac{df}{dy} = \frac{1}{0}$ et $\frac{df}{dy} : \frac{df}{dy'} = \frac{1}{0}$.

Réciproquement, lorsqu'on aura $\frac{df}{dy} = \frac{1}{0}$, l'exposant n sera < 1; et si l'on a en même temps $\frac{df}{dy} : \frac{df}{dy'} = \frac{1}{0}$, le terme $\frac{dp}{dz'} \alpha^{n-1}$ manquera dans la valeur de $\frac{df}{dy'}$, c'est-à-dire que p ne renfermera pas z'; donc alors la valeur $y = X$ sera une solution particulière algébrique de l'équation $y'' = f(x, y, y')$.

Au moyen de ce théorème, il sera facile de trouver toutes les solutions algébriques de l'équation $y'' = f(x, y, y')$, pour lesquelles y'' et $f(x, y, y')$ deviennent deux fonctions identiques de x; il ne nous

Digitized by Google

reste donc plus qu'à examiner le cas particulier où la fonction $f(x, y, y')$ devient $\frac{0}{0}$.

(22) Pour que $f(x, y, y')$ puisse devenir $\frac{0}{0}$, il faut que cette fonction soit donnée sous forme fractionnaire. Si donc on la représente par $\frac{N}{D}$, on trouvera les valeurs de y, pour lesquelles cette fraction devient $\frac{0}{0}$, en posant $N = 0$, $D = 0$, éliminant y' entre ces équations, et cherchant enfin si l'équation finale satisfait aux équations $N = 0$ et $D = 0$; il restera ensuite à reconnaître si les valeurs de y, comprises dans cette équation finale, sont susceptibles d'être complétées par une ou deux constantes arbitraires, ou si elles doivent être rangées parmi les solutions particulières algébriques de l'équation $y'' = f(x, y, y')$.

Pour cela, je suppose que $y = X$ soit une de ces valeurs; et si elle peut être comprise dans une valeur plus générale, je représente celle-ci par $y = X + \alpha z$, z étant une fonction de x et de la constante α, qui ne devient ni zéro ni infinie, quand on fait $\alpha = 0$.

L'équation $y'' = f(x, y, y')$ devient

$$\alpha z'' = f(x, X + \alpha z, X' + \alpha z') - X''.$$

Je développe son second membre selon les puissances ascendantes de α. Soit $\alpha^n p$, le premier terme de ce développement, et représentons, pour abréger, par $\alpha^n P$ le reste du même développement; on aura

$$\alpha z'' = \alpha^n p + \alpha^n P;$$

l'exposant n peut être positif, négatif, ou zéro; p est une fonction de x, z, et z', homogène et de dimension n par rapport à z et z'; P est une fonction de x, z, z' et α, qui devient nulle en même temps que α.

Si l'on a $n < 1$, et que la fonction p ne renferme pas z' à son numérateur, il n'existera pas de valeur de z qui satisfasse à l'équation précédente sans devenir zéro en même temps que α; car alors p sera

Digitized by Google

de la forme $\frac{z^m}{p_1}$, m étant un exposant positif, et p_1 étant une fonction de x, z et z', entière et homogène de dimension $m - n$, par rapport à z et z'; donc en divisant par α^n, et faisant ensuite $\alpha = 0$, dans l'équation précédente, on aura $\frac{z^m}{p'} = 0$, équation qui n'a d'autre solution que $z = 0$.

Au contraire, lorsque n sera > 1 ou $= 1$, ou bien lorsque n étant < 1, p renfermera z à son numérateur, on obtiendra, en suivant la marche indiquée dans le numéro (20), une valeur de z en série ordonnée suivant les puissances de α, qui ne deviendra ni zéro ni infinie pour la valeur $\alpha = 0$, et qui satisfera à l'équation $\alpha^n z = \alpha^n p + \alpha^n P$.

On reconnaîtra donc la nature de la solution $y = X$, pour laquelle on a $f(x, y, y') = \frac{0}{0}$, en considérant seulement le premier terme du développement de $f(x, X + \alpha z, X' + \alpha z') - X''$, ordonné suivant les puissances ascendantes de α : il faudra, pour que $y = X$ soit une solution particulière algébrique de l'équation $y'' = f(x, y, y')$, 1.° que l'exposant de α dans ce premier terme, soit < 1; 2.° que le coëfficient de ce premier terme ne renferme pas z' à son numérateur.

(23) Je prends pour exemple du cas où la valeur de y'' devient $\frac{0}{0}$, l'équation différentielle du deuxième ordre

$$y'' = \frac{y^n}{y'^m},$$

dans laquelle n et m sont des exposans positifs.

La valeur de y est ici $y = 0$, et d'après ce qu'on vient de voir, cette valeur sera une solution particulière algébrique toutes les fois qu'on aura $n - m < 1$; or il est facile de vérifier ce résultat, car l'équation $y'' = \frac{y^n}{y'^m}$ a pour intégrale du premier ordre

$$\frac{y'^{m+2}}{m+2} = \frac{y^{n+1}}{n+1} + c,$$

c étant la constante arbitraire ; prenant $c = 0$, on a l'intégrale

Digitized by Google

particulière

$$\frac{y'^{m+2}}{m+2} = \frac{y^{n+1}}{n+1},$$

à laquelle satisfait la valeur $y = 0$; et d'après ce qu'on a démontré, numéros (1) et (2), elle en est une solution ou une intégrale particulière, selon qu'on a $\frac{n+1}{2+m} < 1$ ou $\frac{n+1}{2+m} > 1$, ou bien, ce qui est la même chose, $n - m < 1$ ou $n - m > 1$: donc aussi $y = 0$ est une solution algébrique ou une intégrale particulière de l'équation $y'' = \frac{y^n}{y'^m}$, selon qu'on a $n - m < 1$ ou $n - m > 1$.

(24) On peut éviter de considérer deux cas différens, comme nous l'avons fait plus haut numéro (19), en supposant l'équation du deuxième ordre, dont il s'agit de trouver les solutions algébriques, résolue par rapport à y; supposition qu'on peut faire sans diminuer en rien l'étendue de l'équation proposée. Cette équation prendra alors la forme $y = f(x, y', y'')$; et si elle est satisfaite par une valeur $y = X$ pour laquelle $f(x, y, y')$ devienne $\frac{0}{0}$, il est visible qu'elle sera encore satisfaite par la valeur $y = X + c$, c étant une constante arbitraire, c'est-à-dire, que la solution $y = X$ sera comprise dans une solution plus générale. Il suffira donc d'examiner le cas où l'équation $y = f(x, y, y'')$ est satisfaite, parce que X et $f(x, X', X'')$ sont deux fonctions identiques de x; or pour reconnaître si la valeur $y = X$ est une solution particulière algébrique, il faudra répéter ici les mêmes raisonnemens que dans le numéro (19).

Ainsi je substituerai dans l'équation $y = f(x, y', y'')$, $X + \alpha z$ à la place de y, et par conséquent $X' + \alpha z'$ et $X'' + \alpha z''$ à la place de y' et y''. Je représenterai par $\alpha^n p$ le premier terme du développement de $f(x, X' + \alpha z', X'' + \alpha z'') - f(x, X' X'')$, ordonné suivant les puissances ascendantes de α, et le reste du développement par $Q\alpha^{n+m}$. L'équation $y = f(x, y', y'')$ deviendra

$$\alpha z = \alpha^n p + Q\alpha^{n+m},$$

Digitized by Google

et il est visible que si l'on a $n > 1$, il n'existera pas de valeur de z qui satisfasse à cette équation sans devenir nulle en même temps que α ; car en divisant par α, et faisant ensuite $\alpha = 0$, cette équation donne $z = 0$. Si au contraire on a $n = 1$ ou $n < 1$, l'équation précédente pourra être satisfaite par une valeur de z qui ne deviendra pas nulle en même temps que α ; et l'on trouvera cette valeur sous forme de série par la méthode indiquée dans le numéro (20).

Il suit de là que la valeur $y = X$ est une solution particulière algébrique, dans le seul cas où l'exposant n surpasse l'unité ; or nous avons supposé

$$f(x, X' + \alpha z', X'' + \alpha z'') = f(x, X', X'') + \alpha^n p + \alpha^{n+m} Q;$$

différenciant cette équation successivement par rapport à z' et à z'', et faisant attention que les différences partielles du premier membre sont égales à $\alpha \frac{df}{dy'}$ et $\alpha \frac{df}{dy''}$, on aura

$$\alpha \frac{df}{dy'} = \alpha^n \frac{dp}{dz'} + \alpha^{n+m} \frac{dQ}{dz'},$$
$$\alpha \frac{df}{dy''} = \alpha^n \frac{dp}{dz''} + \alpha^{n+m} \frac{dQ}{dz''};$$

divisant par α, et faisant ensuite $\alpha = 0$, on aura les valeurs de $\frac{df}{dy'}$ et $\frac{df}{dy''}$, qui se rapportent à $y = X$. Ces valeurs seront nulles lorsqu'on aura $n > 1$; et réciproquement quand elles seront nulles toutes deux à-la-fois, on aura nécessairement $n > 1$. On peut donc énoncer ce théorème :

Si $y = X$ est une solution particulière algébrique de l'équation $y = f(x, y', y'')$, les deux différences partielles $\frac{df}{dy'}$ et $\frac{df}{dy''}$ seront nulles pour la valeur $y = X$;

Réciproquement, si les deux différences partielles $\frac{df}{dy'}$ et $\frac{df}{dy''}$ sont nulles pour une valeur $y = X$, qui satisfasse d'ailleurs à l'équation

Digitized by Google

$y = f(x, y', y'')$, cette valeur sera une solution particulière algébrique.

(25) Soit maintenant $F(x, y, y', y'') = 0$, une équation quelconque du deuxième ordre, dont on propose de trouver les solutions particulières algébriques, et supposons que cette équation soit donnée sous forme rationnelle et sans dénominateur.

Il n'est pas nécessaire pour faire usage du théorème que l'on vient d'énoncer, de résoudre l'équation proposée par rapport à y; il suffit de considérer y comme une fonction implicite de x, y' et y'' déterminée par cette équation; de chercher ses différences partielles par rapport à y' et y'', et de les égaler ensuite à zéro.

De cette manière on trouve $\frac{dF}{dy'} : \frac{dF}{dy} = 0$ et $\frac{dF}{dy''} : \frac{dF}{dy} = 0$, ou simplement $\frac{dF}{dy'} = 0$, et $\frac{dF}{dy''} = 0$, à cause que $\frac{dF}{dy}$ est une fonction rationnelle et entière, qui ne peut devenir infinie. On cherchera donc les équations en x et y qui satisfont à-la-fois aux trois équations $\frac{dF}{dy'} = 0$, $\frac{dF}{dy''} = 0$, $F(x, y, y', y'')$, et pour les trouver :

On éliminera d'abord y' et y'' entre les trois équations précédentes; ce qui donnera une équation en x et y, que je représenterai par $V = 0$; on prendra la différentielle première et la différentielle deuxième de l'équation $V = 0$, ou bien sa différence première et sa différence deuxième, selon que la proposée $F(x, y, y', y'') = 0$ sera une équation différentielle ou une équation aux différences; au moyen de $dV = 0$ et $d^2V = 0$, ou de $\Delta V = 0$ et $\Delta^2 V = 0$, on éliminera y' et y'' dans deux quelconques des trois équations ci-dessus, et l'on aura par ce moyen deux nouvelles équations en x et y, que je représenterai par $U = 0$ et $U_1 = 0$; enfin, on cherchera les facteurs communs aux trois fonctions V, U, U_1, et ces facteurs, égalés à zéro, donneront toutes les solutions particulières de la proposée.

On doit répéter ici l'observation qu'on a faite dans le numéro 18, savoir, qu'il peut quelquefois arriver qu'une équation trouvée par la règle précédente, ne soit pas une solution particulière; ce cas d'exception

Digitized by Google

aura lieu si $\frac{dF}{dy}$ devient zéro en même temps que $\frac{dF}{dy'}$ et $\frac{dF}{dy''}$; et que de plus la vraie valeur des fractions $\frac{dF}{dy'} : \frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dy''} : \frac{dF}{dy}$ ne soit pas zéro.

(26) Sous quelque forme que soit donnée une équation du second ordre; on pourra faire disparaître les radicaux et les dénominateurs, et faire usage ensuite de la règle précédente pour trouver les solutions particulières; cependant il était bon de considérer avec soin, et sous sa forme propre, l'équation résolue par rapport à y'', parce que c'est presque toujours sous cette forme que sont données les équations auxquelles on est conduit par des problèmes de mécanique et par d'autres recherches. Nous pensons donc que les détails dans lesquels nous sommes entrés (numéros 19, 20, 21, 22), ne sont pas absolument superflus, quoique, à la rigueur, la règle du numéro précédent suffise pour résoudre tous les cas qui pourront se présenter.

(27) On peut n'employer que les deux équations $F(x, y, y', y'') = 0$ et $\frac{dF}{dy''} = 0$, pour trouver les solutions algébriques de la première, comme pour trouver les solutions du premier ordre.

En effet, si l'on élimine y'' entre ces deux équations, on aura une équation du premier ordre, que je désignerai par $M = 0$, et à laquelle les solutions algébriques de la proposée devront satisfaire comme solutions ou comme intégrales particulières. On commencera donc par chercher les solutions particulières de $M = 0$, et en ne retenant que celles qui satisfont à l'équation $F(x, y, y', y'') = 0$, on aura déjà une partie des solutions algébriques de cette équation.

Pour trouver les autres, s'il en existe, on observera que les intégrales particulières de $M = 0$ doivent satisfaire à sa différentielle $dM = 0$, ou à sa différentielle $\Delta M = 0$. On pourra donc, au moyen de $dM = 0$ ou de $\Delta M = 0$, éliminer y'' dans $F(x, y, y', y'') = 0$; ce qui donnera une nouvelle équation du premier ordre, que je représenterai par $N = 0$. Lorsque les fonctions M et N auront un ou plusieurs facteurs communs,

ces

Digitized by Google

ces facteurs égalés à zéro, donneront les solutions particulières du premier ordre de la proposée numéro (18).

Après avoir supprimé ces facteurs communs, on éliminera y' entre $M = 0$ et $N = 0$, pour avoir une équation en x et y, que je représente par $M_1 = 0$; puis, au moyen de $dM_1 = 0$, ou de $\Delta M_1 = 0$, on éliminera y' dans l'une ou l'autre des équations $M = 0$ et $N = 0$, ce qui donnera une seconde équation en x et y, que je représente par $N_1 = 0$: toutes ces éliminations faites, on cherchera les facteurs communs aux deux fonctions M_1 et N_1, et ces facteurs égalés à zéro, donneront les solutions algébriques de la proposée qu'il restait à trouver.

(28) Il est facile de généraliser et d'étendre aux équations de tous les ordres le théorème du numéro (24). Considérons, en effet, une équation de l'ordre quelconque n, résolue par rapport à $y^{(n-m)}$ et représentée par

$$y^{(n-m)} = f(x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n)}).$$

Soit $y^{(n-m)} = X$ une valeur de $y^{(n-m)}$ qui satisfasse à cette équation; X désignant ici une fonction de $x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n-m-1)}$. Lorsque cette valeur sera une solution particulière de la proposée, cest-à-dire, lorsqu'elle ne sera pas comprise dans une solution plus générale de l'ordre $(n-m)$ contenant une ou plusieurs constantes arbitraires, les $n-m$ différences partielles $\frac{df}{dy^{(n)}}$, $\frac{df}{dy^{(n-1)}}$, $\frac{df}{dy^{(n-2)}} \ldots \frac{df}{dy^{(n-m)}}$, deviendront toutes nulles pour la valeur $y^{(n-m)} = X$, *E.* Et réciproquement; lorsque ces différences partielles deviendront nulles pour une valeur de $y^{(n-m)}$ qui satisfait en outre à la proposée, on sera certain que cette valeur est une solution particulière de l'ordre $n - m$.

Au moyen de ce théorème, on obtiendra aisément toutes les solutions particulières d'une équation de l'ordre n, depuis celles de l'ordre $n-1$ jusqu'aux solutions algébriques.

En effet, représentons l'équation proposée par

$$F(x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n-1)}) = 0,$$

et supposons qu'il s'agisse d'en trouver les solutions de l'ordre quelconque $n - m$.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN
Digitized by Google

On supposera que cette équation résolue par rapport à $y^{(n-m)}$ donne la valeur ci-dessus de $y^{(n-m)}$; et sans résoudre effectivement la proposée, on aura

$$\frac{df}{dy^{(n)}} = \frac{dF}{dy^{(n)}} : \frac{dF}{dy^{(n-m)}},$$
$$\frac{df}{dy^{(n-1)}} = \frac{dF}{dy^{(n-1)}} : \frac{dF}{dy^{(n-m)}},$$
$$\frac{df}{dy^{(n-2)}} = \frac{dF}{dy^{(n-2)}} : \frac{dF}{dy^{(n-m)}},$$
&c.

Si l'on suppose que la fonction désignée par F est rationnelle et sans dénominateur, en sorte que $\frac{dF}{dy^{(n-m)}}$ ne puisse pas devenir infinie, les conditions $\frac{df}{dy^{(n)}} = 0$, $\frac{df}{dy^{(n-1)}} = 0$, $\frac{df}{dy^{(n-2)}}, \ldots \frac{df}{dy^{(n-m+1)}} = 0$, se réduiront à

$$\frac{dF}{dy^{(n)}} = 0, \quad \frac{dF}{dy^{(n-1)}} = 0, \quad \frac{dF}{dy^{(n-2)}} = 0 \ldots \quad \frac{dF}{dy^{(n-m+1)}} = 0,$$

qui sont précisément celles que M. *Legendre* a données dans le Mémoire déjà cité.

On cherchera donc les équations de l'ordre $n - m$ qui satisfont à-la-fois à ces conditions et à la proposée, et ces équations, que l'on pourra toujours obtenir par le simple procédé de l'élimination, donneront les solutions cherchées de l'ordre $n - m$.

En négligeant ainsi le dénominateur $\frac{dF}{dy^{(n-m)}}$, on est certain d'obtenir toutes les solutions particulières de la proposée, lorsque ce dénominateur n'est pas susceptible de devenir infini; mais il peut arriver qu'une ou plusieurs des équations de l'ordre $n - m$ trouvées de cette manière, ne soient pas des solutions particulières : on lèvera toute espèce de difficulté à cet égard, en cherchant les vraies valeurs des fractions $\frac{dF}{dy^{(n)}} : \frac{dF}{dy^{(n-m)}}$, $\frac{dF}{dy^{(n-1)}} : \frac{dF}{dy^{(n-m)}}$, &c. qui doivent être zéro dans le cas des solutions particulières.

On peut remarquer que la condition $\frac{dF}{dy^{(n)}} = 0$ est commune aux solutions particulières de tous les ordres : de plus, il suffit d'employer

Digitized by Google

cette équation combinée avec la proposée pour trouver successivement toutes ces solutions, ainsi que nous l'avons expliqué dans le numéro 27, pour le cas où la proposée est du second ordre, et nous croyons inutile d'entrer dans de nouveaux détails à ce sujet.

(29) Si l'on prend la différentielle complète de la proposée, on aura

$$\frac{dF}{dy^{(n)}}\cdot dy^{(n)} + \frac{dF}{dy^{(n-1)}}\cdot dy^{(n-1)} + \frac{dF}{dy^{(n-2)}}\cdot dy^{(n-2)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dx}\,dx = 0;$$

d'où l'on tire

$$dy^{(n)} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy^{(n-1)}}\cdot dy^{(n-1)} + \frac{dF}{dy^{(n-2)}}\cdot dy^{(n-2)} + \ldots \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dx}\,dx\right)}{\frac{dF}{dy^{(n)}}};$$

Dans le cas des solutions particulières, cette différentielle complète se réduit à

$$0 = \frac{dF}{dy^{(n-1)}}\cdot dy^{(n-1)} + \frac{dF}{dy^{(n-2)}}\cdot dy^{(n-2)} + \ldots \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dx}\,dx,$$

à cause de $\frac{dF}{dy^{(n)}} = 0$; par conséquent la valeur de $dy^{(n)}$ devient $\frac{0}{0}$.

C'est le théorème de M. *Lagrange*, qui se trouve ainsi démontré pour les équations différentielles et pour les équations aux différences de tous les ordres, et qui a lieu, comme on voit, pour toutes les solutions particulières de la proposée, depuis celles de l'ordre $n - 1$ jusqu'aux solutions algébriques.

Mais l'inverse de cette proposition n'a pas également lieu; et quand on a, par exemple, une équation différentielle du premier ordre, que l'on en déduit, en la différentiant, la valeur de d^2y, et que cette valeur devient $\frac{0}{0}$, en vertu d'une équation entre x et y qui satisfait à la proposée, il n'en faut pas conclure que cette équation soit une solution particulière; il peut arriver qu'elle soit simplement un cas particulier de l'intégrale complète.

Digitized by Google

ARTICLE QUATRE.

Remarques sur les Solutions particulières des Équations différentielles relatives à des problèmes de Dynamique.

(30) Les géomètres sont parvenus à exprimer par des équations différentielles, le mouvement d'un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque, et dont chacun est soumis à l'action d'une force aussi quelconque. L'auteur de la Mécanique analytique a donné ces équations sous une forme générale et qui ne laisse que des substitutions à faire dans chaque cas particulier. Quand ces équations sont formées, il ne reste dans le plus grand nombre de cas qu'à trouver leurs intégrales, et à déterminer les constantes arbitraires au moyen des positions et des vîtesses initiales des corps ; mais il peut arriver que ces équations différentielles admettent des solutions particulières, et alors il s'agit de savoir si l'on doit continuer de prendre les intégrales pour représenter le mouvement du système, ou bien si l'on doit recourir aux solutions particulières ; or, c'est une difficulté qui ne peut être levée que dans chaque cas particulier, et par des considérations tirées de la nature du problème.

Nous allons montrer par des exemples, qu'il faut quelquefois n'employer que les solutions particulières ; que dans d'autres cas, il faut ne tenir aucun compte de ces solutions ; enfin, qu'il y a des cas, et ce sont les plus dignes d'être remarqués, où le mouvement du système doit être représenté pendant un certain temps par les intégrales, et pendant un autre certain temps par les solutions particulières.

(31) Proposons-nous par exemple de déterminer le mouvement rectiligne d'un corps soumis à l'action d'une force retardatrice, variable et proportionnelle à la racine carrée de la vîtesse du mobile. On peut se représenter cette force comme une sorte de frottement qui s'exercerait le long de la droite décrite par le mobile.

L'équation différentielle du mouvement de ce corps sera

$$\frac{dv}{dt} = -a\sqrt{(v)},$$

v désignant la vîtesse, t le temps et a un coëfficient constant.

Digitized by Google

Cette équation a pour solution particulière $v = 0$, et pour intégrale complète

$$v = \left(c - \frac{at}{2}\right)^2,$$

c étant la constante arbitraire. Et si l'on représente par b la vîtesse initiale du mobile, on aura $c = \sqrt{(b)}$, et l'intégrale deviendra

$$v = \left[\sqrt{(b)} - \frac{at}{2}\right]^2.$$

Maintenant il s'agit d'examiner comment cette intégrale et cette solution particulière résolvent le problème proposé.

Or, il est visible par la nature du problème, que si la vîtesse initiale était supposée nulle, le corps devrait rester en repos. Ce serait donc alors la solution particulière $v = 0$, et non pas l'intégrale $v = \frac{a^2 t^2}{4}$, qui donnerait la vraie solution du problème. Si, au contraire, la vîtesse initiale n'est pas supposée nulle, il est évident que le corps doit être mis en mouvement, et qu'il doit continuer à se mouvoir jusqu'à ce que sa vîtesse soit devenue nulle par l'effet du frottement. Le mouvement du corps à l'origine du temps t sera donc représenté par l'intégrale $v = \left[\sqrt{(b)} - \frac{at}{2}\right]^2$; mais quand le temps sera devenu égal à $\frac{2\sqrt{(b)}}{a}$, la vîtesse donnée par cette intégrale sera zéro; donc au bout d'un temps marqué par $\frac{2\sqrt{(b)}}{a}$ le corps cessera de se mouvoir; sa vîtesse, à partir de cet instant, sera toujours zéro, et par conséquent elle ne sera plus donnée par l'intégrale $v = \left[\sqrt{(b)} - \frac{at}{2}\right]^2$, mais bien par la solution particulière $v = 0$.

Ainsi, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{2\sqrt{(b)}}{a}$, le mouvement du corps est représenté par l'intégrale $v = \left[\sqrt{(b)} - \frac{at}{2}\right]^2$, et au-delà de cet instant, c'est la solution particulière $v = 0$ qui donne le mouvement, ou pour mieux dire, qui fait voir que le corps cesse alors de se mouvoir.

C'est pour fixer les idées que nous avons supposé le mouvement

Digitized by Google

rectiligne ; le résultat serait absolument le même si le corps se mouvait sur une courbe quelconque, pourvu que l'on supposât le frottement dirigé suivant la tangente à cette courbe.

(32) Considérons en général l'équation

$$\frac{dv}{dt} = -av^n,$$

qui répond au cas où la force retardatrice est proportionnelle à la puissance n de la vîtesse, n étant un exposant positif quelconque.

Cette équation présente trois cas à examiner; celui où l'on a $n = 1$, le cas dans lequel n est > 1, et enfin celui où n est < 1.

Dans le premier cas, l'intégrale complète est

$$v = be^{-at},$$

b désignant la constante arbitraire et la vîtesse initiale ; et comme dans ce cas il n'y a pas de solution particulière, l'intégrale doit représenter le mouvement du corps dans toute son étendue. C'est ce qui arrive en effet ; car si l'on a $b = 0$, cette intégrale donne $v = 0$, ce qui apprend que le mobile reste en repos, dans le cas où il n'y a pas de vîtesse initiale. Lorsque b ne sera pas zéro, la valeur de v donnée par l'intégrale ne deviendra rigoureusement nulle qu'après un temps infini ; par conséquent le corps n'atteindra jamais le repos ; sa vîtesse diminuera indéfiniment par l'effet du frottement, et il n'y aura aucune contradiction à supposer son mouvement représenté dans toute son étendue par l'équation $v = be^{-at}$.

Dans le cas où l'on a $n > 1$, l'intégrale complète prend cette forme,

$$v = \frac{b}{[1 + (n-1)b^{n-1}at]^{\frac{1}{n-1}}},$$

b désignant toujours la constante arbitraire et la vîtesse initiale. Dans ce cas, comme dans le précédent, il n'y a pas de solution particulière, en sorte que l'intégrale doit représenter le mouvement du corps dans toute son étendue et pour toutes les valeurs possibles de la vîtesse

Digitized by Google

initiale. Aussi l'on voit que si $b = 0$, on aura $v = 0$, et le mobile restera en repos. Si b n'est pas zéro, v ne le deviendra qu'après un temps infini, et le mobile ne s'arrêtera jamais. Ce second cas est semblable au premier.

Enfin, lorsqu'on aura $n < 1$, l'intégrale complète sera

$$v = [b^{1-n} - (1-n)at]^{\frac{1}{1-n}};$$

b étant la constante arbitraire et la vîtesse primitive. On aura en outre la solution particulière $v = 0$; et il faudra répéter ici ce qu'on a dit dans le numéro précédent, où l'on supposait $n = \frac{1}{2}$.

(33) Sans compliquer beaucoup l'exemple que nous avons choisi, on pourrait le rendre plus général, en supposant que la ligne sur laquelle glisse le mobile ait un mouvement uniforme dans le sens de sa longueur. Alors, en désignant par m la vîtesse de ce mouvement uniforme, et en supposant le frottement proportionnel à la puissance n de la vîtesse relative, l'équation différentielle du mouvement serait

$$\frac{dv}{dt} = -a(v-m)^n,$$

n étant un exposant positif et a un coëfficient constant. Or, il est visible que selon que la vîtesse initiale du corps est $< m$ ou $> m$, l'effet du frottement doit être d'accélérer ou de retarder le mouvement, jusqu'à ce que la vîtesse du mobile soit devenue égale à m; et qu'une fois que cela est arrivé, la vîtesse du corps doit rester constante et égale à m. Mais en considérant l'intégrale de l'équation précédente, on trouve, 1.° que dans le cas où l'on a $n = 1$ ou $n > 1$, cas auquel il n'y a pas de solution particulière, la vîtesse du mobile ne devient rigoureusement égale à m qu'après un temps infini; en sorte que le mouvement du corps peut être représenté dans toute son étendue par l'intégrale en question; 2.° que dans le cas où n est < 1, la vîtesse donnée par cette intégrale devient égale à m au bout d'un temps fini et déterminé; d'où il suit que pendant ce temps, le mouvement accéléré ou retardé du corps est représenté par l'intégrale, et qu'après ce temps écoulé, ce même mouvement est représenté par la solution particulière $v = m$.

Digitized by Google

(34) Prenons encore pour exemple le mouvement rectiligne d'un corps partant d'un point donné avec une vîtesse quelconque, et soumis à l'action d'une force attractive ou répulsive, constamment dirigée vers le point de départ, et proportionnelle à une puissance positive de la distance du mobile à ce point.

L'équation différentielle du mouvement, en désignant par x la distance du mobile au point de départ, et par t le temps, sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n,$$

n étant un exposant positif, que nous supposerons < 1, afin d'avoir une solution particulière; et a étant un coëfficient constant, positif dans le cas de la répulsion et négatif dans le cas contraire.

Cette équation a pour intégrale première

$$\frac{dx^2}{dt^2} = b^2 + \frac{2ax^{n+1}}{n+1},$$

b désignant la constante arbitraire et la vîtesse au point de départ, où l'on suppose $x = 0$; et dans le cas où l'on a $b = 0$, on peut encore intégrer l'équation précédente, ce qui donne

$$t = c + \frac{2}{1-n} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+n}{2a}\right)} . x^{\frac{1-n}{2}},$$

c étant la constante arbitraire. On détermine cette constante, en supposant que t soit nul en même temps que x, ce qui donne $c = 0$, à cause que l'exposant $1 - n$ est positif. L'intégrale complète devient alors

$$t = \frac{2}{1-n} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+n}{2a}\right)} . x^{\frac{1-n}{2}}.$$

De plus, l'équation du mouvement $\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n$ a pour solution particulière algébrique (numéro 21), l'équation $x = 0$; et dans le cas que nous examinons, c'est cette solution qui résout le problème; car il est visible que le mobile doit rester au point de départ, puisqu'en ce point sa vîtesse et la force à laquelle il est soumis, sont égales à zéro.

Il faut observer que si l'on suppose a négatif, l'intégrale précédente donnera pour le temps, en fonction de l'espace parcouru, une expression imaginaire,

Digitized by Google

imaginaire, d'où l'on ne peut rien conclure sur l'état du mobile. En prenant, au contraire, a positif, on aura une valeur réelle de t en fonction de x, ou de x en fonction de t; d'où l'on conclurait, si l'on n'avait point égard à la solution particulière, que le corps a un mouvement dans l'espace; ce qui induirait en erreur sur l'état du mobile.

Lorsque la vîtesse initiale b ne sera pas égale à zéro, il faudra ne tenir aucun compte de la solution particulière; car, dans ce cas, le corps doit d'abord être mis en mouvement, et son mouvement ne sera jamais interrompu, soit que la force dirigée au point de départ tende à éloigner le corps de ce point, soit qu'elle tende à l'en rapprocher. Il est facile de voir que s'il y a répulsion, le corps doit s'éloigner indéfiniment du point de départ; et que dans le cas contraire, il doit faire de part et d'autre de ce point une suite infinie d'oscillations égales et d'égales durées. Ces deux mouvemens sont parfaitement représentés par l'intégrale première que nous avons trouvée; et il faudra recourir à cette intégrale pour résoudre le problème proposé, excepté dans le cas particulier où l'on a $b = 0$.

Le cas où la force dirigée au point de départ est proportionnelle à une puissance négative de la distance du mobile à ce point, offre aussi des difficultés qui ont déjà été remarquées; mais ces difficultés ne tiennent point aux solutions particulières; car l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n$ n'en admet aucune, lorsque n est négatif.

(35) Quels que soient l'exposant a et la constante b, l'intégrale première $\frac{dx^2}{dt^2} = b^2 + \frac{2ax^{n+1}}{n+1}$ a une solution particulière de la forme $x =$ constante; mais comme cette solution ne satisfait point à l'équation du mouvement $\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n$, il s'ensuit qu'elle doit être rejetée comme étrangère au problème dont on s'occupe. Il est donc à propos d'observer que les intégrales premières qu'on substitue aux équations de la dynamique, qui sont en général des équations différentielles du second ordre, ne leur sont pas absolument équivalentes; car, d'une part, elles ont quelquefois plus d'étendue, en ce qu'elles admettent des solutions

Digitized by Google

particulières qui, le plus souvent, ne satisfont pas aux équations du second ordre; et, d'un autre côté, elles ne renferment pas les solutions particulières des équations du second ordre, auxquelles cependant on est obligé d'avoir égard, si l'on veut résoudre complétement le problème proposé.

(36) Ces exemples suffisent pour montrer la nécessité d'avoir égard aux solutions particulières dans les problèmes de dynamique, et la difficulté qui se présente, lorsqu'il s'agit de choisir entre la solution particulière et l'intégrale complète. Le mouvement dans l'espace d'un corps soumis à l'action d'une force donnée, et partant d'une position et avec une vîtesse aussi données, doit être absolument déterminé. C'est donc une sorte de paradoxe, que les équations différentielles dont ce mouvement dépend, puissent être satisfaites par plusieurs équations qui remplissent en outre les conditions initiales du mouvement. Il ne paraît pas qu'on ait déjà remarqué cette difficulté, sur laquelle il était bon d'appeler l'attention des géomètres.

Les questions qu'*Euler* a résolues dans sa mécanique, et qui conduisent à des équations différentielles susceptibles de solutions particulières, ne sont pas de l'espèce de celles que nous avons choisies ci-dessus pour exemples. *Euler* se propose de trouver des courbes sur lesquelles un corps soumis à l'action d'une force donnée, puisse se mouvoir en remplissant certaines conditions. Par exemple, dans le numéro 268 du second volume, il cherche une courbe qui jouisse de cette propriété, qu'un corps pesant, projeté avec une vîtesse horizontale donnée, se meuve sur cette courbe en conservant toujours la même vîtesse horizontale. Rien n'empêche qu'il y ait plusieurs courbes qui jouissent de cette propriété; et, en effet, le calcul donne, pour la courbe cherchée, une parabole ou une droite horizontale.

Pour le faire voir, appelons x et y l'abscisse horizontale et l'ordonnée verticale du mobile, comptées du point de départ; désignons par b la vîtesse horizontale, que l'on suppose dirigée dans le sens de x, et

Digitized by Google

par v la vîtesse au bout d'un temps quelconque, dirigée suivant la tangente de la courbe cherchée; enfin, représentons par g la pesanteur,

La vîtesse horizontale du corps devant rester constante et égale à b, on aura $\frac{v\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = b$; la vîtesse verticale, due à la hauteur y, sera $\sqrt{(2gy)}$; par conséquent on aura $\frac{v\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \sqrt{(2gy)}$. Éliminant v entre ces deux équations, on trouve pour l'équation différentielle de la courbe cherchée,

$$b\,dy = dx\sqrt{(2gy)}.$$

Cette équation a pour solution particulière $y = 0$, c'est-à-dire, une droite horizontale passant par le point de départ du corps, et pour intégrale complète

$$4b^2y = [x\sqrt{(2g)} + c]^2,$$

c étant la constante arbitraire. On détermine cette constante, en observant que l'origine des coordonnées étant un point de la courbe, on a à-la-fois $x = 0$ et $y = 0$; d'où il suit $c = 0$, et l'intégrale se réduit à

$$2b^2y = gx^2,$$

équation d'une parabole dont le paramètre dépend de la vîtesse initiale, et dont le sommet est au point de départ du mobile.

Ainsi, la courbe cherchée peut être une parabole ou une droite horizontale; ce qui est d'ailleurs un résultat évident.

ARTICLE CINQ.

Remarques sur les Intégrales et sur les Solutions particulières des Équations aux différences partielles.

(37) L'INTÉGRALE d'une équation aux différences partielles d'un ordre quelconque n, doit en général renfermer un nombre n de fonctions arbitraires; mais il existe des cas particuliers dans lesquels ces fonctions se réduisent à un moindre nombre, sans que l'intégrale perde rien de sa généralité. Ces cas ont lieu lorsque les plus hautes différences

Digitized by Google

relatives à une des variables, manquent dans l'équation aux différentes partielles. Ainsi, z étant une fonction de x et de y, si l'on a pour déterminer cette fonction, une équation aux différences partielles de l'ordre quelconque n, dans laquelle la plus haute différence de z relative à x soit $\frac{d^m z}{dx^m}$, m étant plus petit que n, et qui ne contienne pas les différences de $\frac{d^m z}{dx^m}$ relatives à y; la valeur la plus générale de z qu'on puisse déduire de cette équation, ne comportera qu'un nombre m de fonctions arbitraires. Si donc on obtenait une intégrale de cette équation, qui renfermât un plus grand nombre de fonctions arbitraires, on pourrait être certain que ces fonctions ne sont point essentiellement distinctes et irréductibles entre elles.

(38) Pour démontrer cette proposition, j'observe que sans restreindre en rien la valeur de z, on peut toujours la représenter par une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x - a$, a étant une constante indéterminée; car si l'on substitue dans cette valeur représentée par $f(x, y)$, $a + x - a$ au lieu de x, on aura par le théorème de *Taylor*,

$$z = f(a,y) + (x-a)\frac{df}{da} + \frac{(x-a)^2}{2}\frac{d^2f}{da^2} + \frac{(x-a)^3}{2.3}\cdot\frac{d^3f}{da^3} + \&c.$$

et cette série ne sera jamais en défaut, tant que a restera indéterminé.

Il suit de ce principe, que si l'on propose d'intégrer une équation aux différences partielles quelconque, et si l'on commence par mettre dans cette équation $x + a$ au lieu de x, il sera permis, après cette préparation, de représenter l'intégrale demandée par une série de cette forme,

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.,$$

A, B, C, &c. étant des coèfficiens indépendans de x, qu'on déterminera par la méthode des coèfficiens indéterminés ou par tout autre moyen.

Les valeurs des coèfficiens A, B, C, &c. pourront renfermer la constante arbitraire a; mais il est bon d'observer que cette arbitraire

Digitized by Google

n'ajoute rien à la généralité de la valeur de z; qu'elle n'est introduite dans le calcul que pour rendre cette valeur développable suivant les puissances de x; et que quand les coèfficiens A, B, C, &c. sont déterminés, on peut donner à a telle valeur numérique que l'on voudra; pourvu qu'aucun de ces coèfficiens ne devienne infini par suite de cette valeur.

(39) Démontrons maintenant la proposition du numéro (37), et pour cela substituons $x + a$ au lieu de x, dans l'équation aux différences partielles que l'on considère, préparation qui ne change rien à la forme de cette équation; cela fait, supposons l'intégrale ou la valeur de z, développée suivant les puissances de x; on aura par le théorème de *Taylor*,

$$z = Z + xZ' + \frac{x^2}{1.2} Z'' + \frac{x^3}{2.3} Z''' + \text{&c.}$$

Z, Z', Z'', &c. désignant les valeurs de z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, &c. dans lesquelles on a fait $x = 0$, après les différenciations : or dans cette série, les m premiers coèfficiens Z, Z', Z'', ... $Z^{(m-1)}$ resteront seuls arbitraires; car d'après la forme que l'on a supposée, numéro (37), à l'équation qu'il s'agit d'intégrer, il est visible que l'on peut déduire de cette équation, par de simples différenciations, les valeurs de toutes les différences de z relatives à x, à partir de celle de l'ordre m; faisant ensuite $x = 0$ dans ces valeurs, on aura celles de $Z^{(m)}$, $Z^{(m+1)}$, &c. en fonction des coèfficiens Z, Z', Z''... $Z^{(m-1)}$, et de leurs différences relatives à y.

(40) Prenons pour exemple l'équation fort simple $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dy^2}$, qui reste la même quand on y met $x + a$ au lieu de x; en sorte que cette préparation est inutile dans ce cas particulier; et en général elle est inutile toutes les fois que la proposée ne renferme pas la variable suivant laquelle on veut développer l'intégrale.

Son intégrale en série, ordonnée suivant les puissances de x, et obtenue, soit par le théorème de *Taylor*, soit par la méthode des

Digitized by Google

coëfficiens indéterminés, est

$$z = Fy + x\frac{d^2.Fy}{dy^2} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^4.Fy}{dy^4} + \frac{x^3}{2.3}\cdot\frac{d^6.Fy}{dy^6} + \&c.$$

Fy étant une fonction arbitraire et la seule que renferme cette intégrale.

L'intégrale de la même équation, ordonnée suivant les puissances de y, serait

$$z = \varphi x + y\pi x + \frac{y^2}{2}\cdot\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{y^3}{2.3}\cdot\frac{d\pi x}{dx} + \frac{y^4}{2.3.4}\cdot\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{y^5}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \&c.$$

φx et πx étant des fonctions arbitraires. Ces deux intégrales devant être équivalentes, il faut que les deux fonctions φx et πx se réduisent à une seule, sans que la seconde valeur de z perde rien de sa généralité; or c'est ce qui arrive en effet, et pour le prouver, il suffit de développer les fonctions φx et πx suivant les puissances de x, et d'ordonner la seconde valeur de z, aussi suivant les puissances de x.

En faisant

$$\varphi x = A + Bx + \frac{Cx^2}{2} + \frac{Dx^3}{2.3} + \&c.$$

$$\pi x = A' + B'x + \frac{C'x^2}{2} + \frac{D'x^3}{2.3} + \&c.$$

on aura

$$z = A + A'y + \frac{By^2}{2} + \frac{B'y^3}{2.3} + \frac{Cy^4}{2.3.4} + \frac{C'y^5}{2.3.4.5} + \&c.$$
$$+ x\left(B + By' + \frac{Cy^2}{2} + \frac{C'y^3}{2.3} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{x^2}{2}\left(C + Cy' + \&c.\right) + \&c.$$

La partie indépendante de x, dans cette série, peut être regardée comme le développement d'une fonction arbitraire de y; et en représentant cette fonction par Fy, la série entière deviendra

$$z = Fy + x.\frac{d^2Fy}{dy^2} + \frac{x^2}{2}.\frac{d^4Fy}{dy^4} + \&c.$$

c'est-à-dire, la première valeur de z.

Il est facile de multiplier les exemples, et en général on verra que les équations de l'ordre n, dont les intégrales comportent moins de n

Digitized by Google

fonctions arbitraires, sont de l'espèce de celles qui ne peuvent être intégrées sous forme finie; c'est même parce que ces intégrales sont sous la forme de séries, qu'il arrive que deux ou un plus grand nombre de fonctions arbitraires peuvent se réduire à une seule, comme on vient d'en voir un exemple.

(41) Si l'on prenait pour exemple une équation de l'ordre quelconque n, dans laquelle la plus haute différence de z, relative à x, fût $\frac{d^m z}{dx^m}$, m étant $< n$, mais qui renfermât les différences de $\frac{d^m z}{dx^m}$ relatives à y, il arriverait encore que la valeur de z en série ordonnée suivant les puissances de x, ne contiendrait qu'un nombre m de fonctions arbitraires; mais ces fonctions se trouveraient sous le signe intégral, ce qui introduirait dans la série une infinité de constantes arbitraires, et ces constantes équivaudraient à une ou plusieurs nouvelles fonctions arbitraires.

Ainsi, par exemple, si l'on cherche par la méthode des coëfficiens indéterminés, l'intégrale en série de l'équation $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = z$, on trouve

$$z = \Phi y + x\int \Phi y.dy + \frac{x^2}{2}\int^2 \Phi y.dy^2 + \frac{x^3}{2.3}\int^3 \Phi y.dy^3 + \&c.,$$

série qui ne renferme explicitement que la seule fonction arbitraire Φy.

Mais si l'on met $\Phi y + A$, au lieu de Φy, A étant une constante arbitraire, et si l'on désigne par B la constante qu'il faut ajouter à l'intégrale de Φy, par C, celle qu'il faut ajouter à l'intégrale de $\int \Phi y.dy$, par B, celle qu'il faut ajouter à l'intégrale de $\int^2 \Phi y.dy^2$, et ainsi de suite, la valeur de z se trouvera renfermer cette seconde partie :

$$z = A + Bx + \frac{Cx^2}{2} + \frac{Dx^3}{2.3} + \&c.$$
$$+ y\left(Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{y^2}{2}\left(\frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{2.3} + \frac{Cx^4}{2.3.4} + \frac{Dx^5}{2.3.4.5} + \&c.\right) + \&c.$$

Or la partie indépendante de y, dans cette série, peut être regardée

Digitized by Google

comme le développement d'une fonction arbitraire de x, et si l'on représente cette fonction par $\downarrow x$, la série entière prend cette forme :

$$z = \downarrow x + y\int \downarrow x . dx + \frac{y^2}{2}\int^2 \downarrow x . dx^2 + \frac{y^3}{2.3}\int^3 \downarrow x . dx^3 + \&c.$$

En l'ajoutant à la série ordonnée suivant les puissances de x, on a une valeur de z renfermant deux fonctions arbitraires $\downarrow x$ et φy, et qui est l'intégrale complète de l'équation $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = z$.

(42) La démonstration du numéro 39 prouve seulement que quand la plus haute différence relative à x, qui entre dans une équation aux différences partielles de l'ordre n, est $\frac{d^m z}{dx^m}$, m étant $< n$, et que cette équation ne renferme pas les différences de $\frac{d^m z}{dx^m}$ relatives à y, l'intégrale ne peut comporter qu'un nombre m de fonctions arbitraires irréductibles entre elles; mais il n'en faut pas conclure que cette intégrale doive effectivement renfermer un pareil nombre de fonctions, car il est quelquefois possible que par des transformations et des changemens de variables, on parvienne à abaisser encore l'ordre de la proposée, par rapport aux différences relatives à l'une des nouvelles variables, et alors l'intégrale ordonnée suivant les puissances de cette variable, devra renfermer moins de m fonctions arbitraires; d'où il suit que les fonctions, en nombre m, qui entraient dans l'intégrale ordonnée suivant les puissances de x, n'étaient point irréductibles entre elles.

On voit donc qu'il est impossible de déterminer, à l'inspection d'une équation aux différences partielles donnée, le nombre de fonctions arbitraires essentiellement distinctes que son intégrale doit renfermer, et que quand on a obtenu cette intégrale sous la forme d'une série, on ne peut pas non plus décider si les fonctions arbitraires qu'elle renferme sont irréductibles entre elles.

(43) Par suite de ces réductions dans le nombre des fonctions arbitraires, il arrive une circonstance assez remarquable par rapport aux solutions particulières : c'est qu'une équation aux différences partielles, non

Digitized by Google

non linéaire, peut avoir une solution particulière qui paraît aussi étendue que son intégrale générale.

Par exemple, l'équation du deuxième ordre

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dz}{dy}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x}\right) + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x}\right)y = 0,$$

ne doit comporter, dans son intégrale, qu'une seule fonction arbitraire, et cependant elle a pour solution particulière une équation du premier ordre, ou, ce qui revient au même, une équation algébrique renfermant une fonction arbitraire.

Pour trouver cette solution particulière, et, en général, pour trouver les solutions particulières d'une équation quelconque du deuxième ordre, donnée sous forme rationnelle et sans dénominateur, il faut différencier cette équation successivement par rapport aux trois différences partielles $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; égaler à zéro ces trois résultats, et chercher ensuite les équations du premier ordre qui satisfont à-la-fois à ces trois équations et à la proposée; mais comme l'équation ci-dessus ne contient ni $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, ni $\frac{d^2z}{dy^2}$, il s'ensuit qu'on n'aura qu'une seule équation de condition, savoir,

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dy}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x}\right) = 0.$$

On satisfait à cette équation et à la proposée, en faisant

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = (1+x)\,\Phi(y).$$

En comparant cette solution particulière à l'intégrale en série ordonnée suivant les puissances de y, on voit que l'une et l'autre de ces équations renfermant une seule fonction arbitraire, elles sont du même degré de généralité. L'intégrale en série ordonnée suivant les puissances de x, renferme deux fonctions arbitraires; mais comme ces fonctions ne sont pas irréductibles entre elles, on ne peut pas dire que cette intégrale ait plus d'étendue que la solution particulière.

Digitized by Google

(44) Afin de ne pas laisser incomplète la théorie des solutions particulières exposée dans les articles précédens, il convient de démontrer ici la règle dont on fait usage pour trouver celles des équations aux différences partielles. Considérons seulement une équation du deuxième ordre donnée sous forme rationnelle et sans dénominateurs, et représentons-la par

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

p, q, r, s, t, désignant, pour abréger, les différences partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$.

Supposons que $z = \Phi(x, y)$ satisfasse à cette équation. Si cette valeur de z peut être complétée par une ou par deux fonctions arbitraires, et si l'on représente la valeur complète par

$$z = \Phi(x, y) + \alpha u,$$

u désignant une fonction de x, y et α, qui ne devient ni zéro ni infinie quand on fait $\alpha = 0$, il est facile de voir que la partie de u indépendante de la constante α, doit renfermer le même nombre de fonctions arbitraires que la fonction u elle-même; d'où il suit que la considération de cette partie de u suffira pour déterminer la nature de la solution $z = \Phi(x, y)$.

Or, en substituant dans l'équation proposée, la valeur complète de z, on trouve pour déterminer la partie de u indépendante de α, l'équation

$$0 = \frac{df}{dz}.u + \frac{df}{dp}.\frac{du}{dx} + \frac{df}{dy}.\frac{du}{dy} + \frac{df}{dr}.\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{df}{ds}.\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{df}{dt}.\frac{d^2u}{dy^2}, \quad \ldots(a)$$

dans laquelle les différences partielles $\frac{df}{dz}$, $\frac{df}{dp}$, $\frac{df}{dq}$, $\frac{df}{dr}$, $\frac{df}{ds}$, $\frac{df}{dt}$, se rapportent à la valeur particulière $z = \Phi(x, y)$.

Lors donc qu'on aura pour cette valeur particulière

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{df}{dr} = 0, \quad \frac{df}{ds} = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0, \quad \ldots(b)$$

l'équation précédente se réduira à $\frac{df}{dz}u = 0$; et si l'on n'a pas en

Digitized by Google

même temps $\frac{df}{dz} = 0$, il faudra qu'on ait $u = 0$, équation impossible, puisque u ne devient pas nulle en même temps que α. Donc dans ce cas, la valeur $z = \varphi(x, y)$ ne pourra être comprise dans aucune autre valeur plus générale, et par conséquent elle sera une solution particulière algébrique de la proposée. Donc, pour trouver les solutions de cette espèce, il faut chercher les valeurs de z qui satisfont à la proposée et aux équations *(b)*; valeurs qui seront toutes comprises dans l'équation qu'on obtiendra en éliminant p, q, r, s, t, entre ces équations et la proposée.

Lorsqu'on aura seulement

$$\frac{df}{dr} = 0, \quad \frac{df}{ds} = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0, \ (c)$$

l'équation *(a)* se réduira à

$$\frac{df}{dz} \cdot u + \frac{df}{dp} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{du}{dy} = 0,$$

par conséquent la valeur de u, étant donnée par une équation aux différences partielles du premier ordre, ne renfermera qu'une seule fonction arbitraire, et par conséquent aussi la valeur $z = \varphi(x, y)$ ne pourra être complétée que par une seule fonction. Donc si l'on trouve une équation du premier ordre qui satisfasse à-la-fois à la proposée et aux équations *(c)*, cette équation sera une solution particulière du premier ordre. Ainsi toutes les solutions de cette espèce seront contenues dans l'équation résultant de l'élimination de r, s et t, entre les équations *(c)* et la proposée : il ne s'agira, après avoir fait cette élimination, que de distinguer parmi les facteurs de l'équation finale, ceux qui satisfont aux équations *(c)*.

Dans le cas où l'on aurait $\frac{df}{dz} = 0$, outre les équations *(b)*, l'équation *(a)* deviendrait identique, et alors il faudrait recourir, pour déterminer la partie de u indépendante de α, à la considération des termes de seconde dimension dans le développement de la proposée.

Digitized by Google

Nous ne nous arrêterons pas à ce cas particulier, qui présenterait les mêmes circonstances que la discussion du cas général.

Si l'on suppose que p, q, r, s, t, représentent les différences finies partielles de z, les règles qu'on vient de démontrer auront encore lieu, et elles serviront à trouver les solutions particulières algébriques et du premier ordre, des équations du deuxième ordre aux différences finies partielles. En général, toutes les remarques que l'on a faites dans cet article, s'étendent aux équations aux différences partielles finies ou ordinaires de tous les ordres, et entre un nombre quelconque de variables.

Digitized by Google

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT,

Contenant de nouveaux développemens sur les remarques qui terminent l'article I.^er^ de ce Mémoire.

On a démontré (numéro 6) qu'une équation différentielle du premier ordre étant donnée, on peut toujours délivrer cette équation de sa solution particulière, si elle en admet une, et réciproquement (numéro 8) introduire dans cette équation telle solution particulière que l'on veut. On a ensuite fait voir que cette solution, quoique choisie arbitrairement, était toujours tellement liée à la forme de l'intégrale complète, que l'on pouvait encore la déduire de cette intégrale par la variation de la constante arbitraire. En géométrie, l'intégrale complète d'une équation du premier ordre peut être *construite* par le système d'une infinité de courbes qui sont données par cette intégrale, en y prenant les variables pour coordonnées, et en y considérant la constante arbitraire comme un paramètre constant pour une même courbe, et variable d'une courbe à l'autre. La solution particulière est alors représentée par la ligne formée par les intersections successives de ces courbes, ou, autrement dit, par la ligne de contact de ce système de courbes; et pour concevoir comment on peut, à volonté, introduire ou faire disparaître une solution particulière ainsi représentée, il faut observer que si l'on effectue dans l'intégrale un changement de variable, et que l'on prenne ensuite les nouvelles variables pour coordonnées, il en résultera, en général, une suite de courbes, et par conséquent une ligne de contact, absolument différentes des premières. Pour préciser davantage ces considérations générales, je me suis proposé de résoudre ce problème.

Étant donnée une équation entre trois indéterminées x, y et a, construire cette équation par une suite de courbes qui aient pour ligne

Digitized by Google

de contact une courbe donnée de forme et de position, en prenant a pour paramètre variable d'une courbe à l'autre, x pour abscisse, et une fonction convenable de x et y pour ordonnée.

Les deux exemples suivans suffiront pour faire voir que ce problème peut toujours être résolu, et pour en montrer la solution.

Soit l'équation $y = 2ax - a^2$, que l'on propose de construire par une suite de courbes, dont la ligne de contact soit une droite, faisant avec l'axe des abscisses un angle donné et passant par l'origine des coordonnées. La variable x doit être prise pour abscisse, a pour paramètre variable, et la question consiste à trouver quelle fonction de x et y il faut prendre pour ordonnée.

Si l'on prenait y pour ordonnée, la proposée serait construite par un système de lignes droites; leur courbe de contact serait une parabole dont l'équation est $y = x^2$; donc d'après la théorie de M. *Lagrange*, l'équation du premier ordre dont $y = 2ax - a^2$ est l'intégrale complète, a étant la constante arbitraire, doit avoir pour solution particulière l'équation $y = x^2$. Si donc, au moyen d'un changement de variables, on délivre cette équation de sa solution particulière, et que l'on effectue le même changement dans l'intégrale $y = 2ax - a^2$, l'intégrale transformée pourra être construite par une suite de courbes qui n'auront aucune ligne de contact. Et si, au moyen d'un second changement de variables, on introduit dans l'équation du premier ordre, comme solution particulière, l'équation de la ligne de contact donnée par l'énoncé du problème, que l'on effectue également ce second changement de variables dans l'intégrale complète; la seconde intégrale transformée pourra être construite par une suite de courbes qui auront pour ligne de contact la courbe demandée, et le problème sera résolu.

L'équation différentielle dont $y = 2ax - a^2$ est l'intégrale complète, est

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\cdot\frac{dy^2}{dx^2};$$

Digitized by Google

résolue par rapport à dy, elle donne

$$dy = 2[x \pm \sqrt{(x^2 - y)}]dx;$$

et l'on peut vérifier qu'elle a effectivement $y - x^2 = 0$ pour solution particulière. Pour séparer cette solution particulière, je fais $x^2 - y = z^2$, z étant une nouvelle variable; l'équation précédente devient

$$z(dz \pm dx) = 0,$$

et supprimant le facteur z, on a l'équation $dz \pm dx = 0$, qui n'a plus aucune solution particulière.

L'intégrale $y = 2ax - a^2$ devient, par suite de la même transformation, $z^2 = x^2 - 2ax + a^2$, ou $z = \pm (x - a)$. En prenant donc z pour ordonnée, elle sera construite par deux suites de droites parallèles, faisant avec l'axe des x un angle d'un demi-droit, c'est-à-dire, qu'elle sera représentée par un système de courbes dépourvu de ligne de contact.

Maintenant j'observe que la courbe qui doit devenir la ligne de contact, par l'énoncé du problème, a pour équation

$$u - mx = 0,$$

m étant une constante donnée, x étant l'abscisse, et u étant la variable que l'on prend pour ordonnée. Afin donc que cette équation devienne une solution particulière de l'équation $dz \pm dx = 0$, je multiplie celle-ci par $(u - mx)^n$, n étant un exposant positif et < 1; ce qui donne

$$(u - mx)^n dz \pm (u - mx)^n dx = 0.$$

Je détermine u en fonction de x et z, en posant l'équation $du = (u - mx)^n dz$, dans laquelle du est la différentielle de u prise seulement par rapport à z, de sorte qu'en intégrant, on trouve

$$(u - mx)^{1-n} = (1 - n)z + X(1 - n),$$

X désignant une fonction arbitraire de x; et en différenciant à-la-fois, par rapport à z, u et x, il vient

$$du - m dx = (u - mx)^n dz + (u - mx)^n dX,$$

Digitized by Google

ce qui réduit l'équation différentielle précédente, à

$$du - m\,dx - (dX \pm dx)(u - mx)^n = 0;$$

équation qui a visiblement, pour solution particulière, $u - mx = 0$.

En vertu de cette nouvelle transformation, l'intégrale $z = \pm(x-a)$, prend cette forme,

$$(u - mx)^{1-n} = \pm(1 - n)(x - a) + X(1 - n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$u - mx = [\pm(1 - n)(x - a) + X(1 - n)]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Or en prenant x pour abscisse, u pour ordonnée, et a pour paramètre variable d'une courbe à l'autre, cette équation sera construite par une suite de courbes qui auront pour ligne de contact la droite dont l'équation est $u - mx = 0$; puisque l'équation du premier ordre dont cette équation est l'intégrale complète, a étant la constante arbitraire, a maintenant pour solution particulière $u - mx = 0$. C'est aussi ce que l'on trouve en cherchant l'équation de la ligne de contact; car si l'on différencie l'intégrale par rapport à a, il vient

$$[\pm(x - a)(1 - n) + X(1 - n)]^{\frac{n}{1-n}} = 0,$$

ou simplement

$$\pm(x - a) + X = 0,$$

à cause que n et $1 - n$ sont supposés positifs; et si l'on élimine a entre cette équation et l'intégrale, on obtient pour la ligne de contact l'équation $u - mx = 0$.

Les courbes qui ont cette droite pour ligne de contact, ne sont pas entièrement déterminées de forme et de position, puisque leur équation générale renferme la fonction arbitraire X, et l'exposant n qu'on peut prendre quelconque, pourvu qu'il soit positif et < 1. Il s'ensuit donc que le problème proposé peut être résolu d'une infinité de manières, c'est-à-dire, que l'équation donnée $y = 2ax - a^2$, peut être construite par une infinité de suites différentes de courbes qui aient toutes pour ligne de contact la droite donnée.

Pour

Digitized by Google

Pour fixer les idées, prenons $X = o$ et $n = \frac{1}{2}$; l'équation en u, x et a sera, dans ce cas,

$$u - mx = \frac{(x-a)^2}{4};$$

les courbes seront une suite de paraboles ; la valeur de z en u et x deviendra $z = 2\sqrt{(u - mu)}$; et par suite, la valeur de y, savoir, $y = x^2 - z^2$, deviendra $y = x^2 - 4(u - mx)$; d'où l'on tire

$$u = \frac{x^2 - y + 4mx}{4}.$$

Ainsi en prenant pour abscisse x, pour ordonnée la fonction $\frac{x^2-y+4mx}{4}$, et a pour paramètre variable, l'équation donnée $y = 2ax - a^2$, se trouvera construite par une suite de paraboles qui auront pour courbe de contact la droite aussi donnée par l'énoncé du problème ; résultat facile à vérifier, en observant que l'équation donnée peut être écrite ainsi,

$$\frac{x^2 - y + 4mx}{4} = \frac{(x-a)^2}{4} + mx.$$

Pour second exemple, proposons-nous de construire l'équation

$$y = ax + \sqrt{(1 + a^2)},$$

au moyen d'un système de courbes qui n'aient aucune ligne de contact, en prenant a pour paramètre variable d'une courbe à l'autre, x pour abscisse, et une fonction convenable de x et y pour ordonnée.

Dans le cas où l'on prendrait y pour ordonnée, l'équation serait construite par une suite de droites, toutes situées à la même distance de l'origine des coordonnées, et dont la courbe de contact serait par conséquent un cercle. L'équation du premier ordre que l'on obtiendra en éliminant la constante a entre l'équation proposée et sa différentielle, aura donc, pour solution particulière, l'équation de ce cercle ; et la question qu'il s'agit de résoudre se réduit à faire disparaître cette solution sans en introduire aucune autre.

On trouve, en éliminant a de cette manière,

$$y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx}\right)},$$

Digitized by Google

et en résolvant cette équation par rapport à dy, il vient

$$dy = \frac{dx}{1-x^2}\left[-xy \pm \sqrt{(x^2+y^2-1)}\right] \ldots\ldots (a).$$

On vérifie aisément que cette équation a pour solution particulière l'équation $x^2+y^2-1=0$; or, pour la délivrer de cette solution, je divise ses deux membres par $\sqrt{(x^2+y^2-1)}$, ce qui donne

$$\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2-1)}} = \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{-xy \pm \sqrt{(x^2+y^2-1)}}{\sqrt{(x^2+y^2-1)}}\right] \ldots\ldots (b).$$

Je prends une nouvelle variable z qui soit fonction de x et y, et dont la différentielle relative à y soit $\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2-1)}}$, et pour cela, je fais

$$z = \text{Log.}\left[y + \sqrt{(x^2+y^2-1)}\right],$$

équation d'où l'on tire

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2-1)}} + \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2-1)}\left[y+\sqrt{(x^2+y^2-1)}\right]},$$

$$y = \frac{e^z + (1-x^2)e^{-z}}{2},$$

$$\sqrt{(x^2+y^2-1)} = \frac{e^z + (x^2-1)e^{-z}}{2}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation *(b)* devient, toute réduction faite,

$$dz = \frac{\pm dx}{1 \pm x},$$

et, comme on voit, elle n'a plus aucune solution particulière.

On peut conclure de là que l'intégrale $y = ax + \sqrt{(1+a^2)}$, doit prendre cette forme

$$z = \log.(1 \pm x) + A,$$

A désignant une fonction de la constante a; et en effet, si l'on substitue la valeur de y dans celle de z, on trouve

$$z = \log.(1 \pm x) + \log.\left[a + \sqrt{(1+a^2)}\right].$$

En prenant x pour abscisse, z pour ordonnée, et a pour paramètre, cette équation sera construite par deux suites de logarithmiques qui n'auront visiblement aucune ligne de contact; d'où il suit que pour résoudre

Digitized by Google

le problème proposé, c'est la fonction z, ou log. $[y+\sqrt{(x^2+y^2-1)}]$, qu'il faut prendre pour ordonnée.

On peut observer ici que si l'équation *(a)* était donnée sous cette forme, il serait difficile d'en apercevoir l'intégrale; tandis qu'en la délivrant de sa solution particulière $x^2+y^2-1=0$, et en lui donnant cette autre forme $dz=\frac{\pm dx}{1\pm x}$, elle devient immédiatement intégrable. En général, les solutions particulières dont une équation différentielle se trouve compliquée, sont un obstacle à l'intégration: en faisant disparaître ses solutions, on restreint en quelque sorte l'étendue de l'équation différentielle; elle prend une forme plus simple, et souvent cette préparation suffit pour qu'on puisse l'intégrer. Les transformations que nous avons indiquées pour atteindre ce but, peuvent donc être de quelque usage dans la pratique du calcul intégral, outre qu'elles nous semblent propres à jeter un grand jour sur la nature des solutions particulières, qui fait un point important de la théorie de ce calcul.

M. *Lagrange* a démontré (12.e cahier du Journal de l'École polytechnique, *page 182)* que l'on pouvait toujours mettre une équation du premier ordre sous une forme telle qu'en la différenciant, on obtienne une équation qui se décompose en deux facteurs, dont l'un renferme la solution particulière, et dont l'autre fournit une équation du second ordre, délivrée de cette solution. La différenciation peut donc aussi être considérée comme un moyen de faire disparaître les solutions particulières; et c'est pour cette raison que l'on parvient à intégrer certaines classes d'équations, en commençant d'abord par les différencier; mais on peut voir, par l'Analyse de M. *Lagrange*, qu'il n'existe pas de moyen direct pour mettre une équation du premier ordre sous une forme telle que sa différentielle se décompose en deux facteurs, à moins que l'on ne connaisse déjà l'intégrale de la proposée; d'ailleurs le procédé de la différenciation, en délivrant une équation du premier ordre de ses solutions particulières, a le désavantage de conduire à

Digitized by Google

une équation du second ordre; il est donc préférable, en général, de faire disparaître ces solutions par un simple changement de variables, comme nous l'avons fait dans les deux exemples ci-dessus.

Pour montrer, par un troisième exemple, comment on parvient à intégrer les équations différentielles en commençant par les délivrer des solutions particulières qu'elles peuvent avoir, prenons l'équation

$$dy = \frac{dx(2x - m - n)y \pm \sqrt{[y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)]}}{2(m-x)(n-x)},$$

que nous supposons donnée sous cette forme, et que l'on propose d'intégrer; k, m, n sont des constantes quelconques; et la proposée résulte de l'équation traitée dans la Théorie des fonctions, *page 135*, en la résolvant par rapport à dy.

Je remarque d'abord que cette équation a pour solution particulière

$$y^2(m-n) + 4k(m-x)(n-x) = 0.$$

Afin de faire disparaître cette solution, je divise les deux membres de la proposée par

$$\sqrt{[y^2(m-n) + 4k(m-x)(n-x)]},$$

ce qui donne, en multipliant par $m - n$,

$$\frac{(m-n)\,dy}{\sqrt{[y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)]}} = \frac{\pm(m-n)\,dx}{2(m-x)(n-x)} + \frac{(2x-m-n)(m-n)y\,dx}{2(m-x)(n-x)\sqrt{[y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)]}}.$$

Je prends une nouvelle variable z, qui soit fonction de x et y, et dont la différentielle relative à y, soit égale au premier membre de l'équation précédente; je fais donc

$$z = \log.\{y(m-n) + \sqrt{[y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)]}\};$$

et l'équation précédente prend cette forme,

$$dz = \frac{\pm(m-n)\,dx}{2(m-x)(n-x)} + \frac{(2x-m-n)[y(m-n) + 4k(m-x)(n-x)e^{-z}]\,dx}{2(m-x)(n-x)\sqrt{[y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)]}}.$$

L'équation en z, x et y, donne

$$y(m-n) = \frac{e^z - 4k(m-x)(n-x)e^{-z}}{2}$$

$$\sqrt{[y^2(m-n)^2 + 4k(m-x)(n-x)]} = \frac{e^z + 4k(m-x)(n-x)e^{-z}}{2},$$

Digitized by Google

et par conséquent

$$y(m-n)+4k(m-x)(n-x)e^{-z}=\sqrt{[y^2(m-n)^2+4k(m-x)(n-x)]},$$

ce qui réduit la valeur de dz, à

$$dz=\frac{(2x-m-n)\,dx\pm(m-n)\,dx}{2(m-x)(n-x)};$$

équation qui se décompose en deux autres,

$$dz=\frac{dx}{x-m}\text{ et }dz=\frac{dx}{x-n},$$

délivrées de solutions particulières, et qui s'intègrent immédiatement.

En intégrant la première, on aura

$$z=\log.\,a+\log.\,(x-m),$$

log. a étant la constante arbitraire; substituant cette valeur de z dans celle de y, il vient

$$y(m-n)=\frac{a(x-m)}{2}+\frac{2k(x-n)}{a},$$

pour l'intégrale demandée.

Si l'on veut avoir le même résultat que dans la théorie des fonctions, on n'a qu'à faire

$$\frac{a}{2}+\frac{2k}{a}=A(m-n)\text{ et }-\frac{am}{2}-\frac{2kn}{a}=B(m-n);$$

l'intégrale trouvée deviendra $y=Ax+B$, dans laquelle A et B seront deux constantes liées entre elles par l'équation que l'on obtient en éliminant a entre les deux précédentes, ce qui donne

$$(B+Am)(B+An)=K.$$

On obtiendrait la même intégrale $y=Ax+B$, et la même relation entre A et B, en employant la seconde valeur de dz, c'est-à-dire, $dz=\frac{dx}{x-n}$ au lieu de la valeur $dz=\frac{dx}{x-m}$.

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur les Équations aux Différences mêlées.

Lu à l'Institut le 21 Prairial an 13.

Par M. POISSON.

IL était naturel, après avoir considéré séparément les équations différentielles et les équations aux différences, que l'on s'occupât de celles qui renferment à-la-fois des différentielles et des différences, c'est-à-dire, des équations aux différences mêlées; c'est aussi ce que plusieurs géomètres ont déjà fait; mais la théorie de ces équations est encore très-peu avancée, et si l'on excepte le cas où l'équation aux différences mêlées est l'équation différentielle d'une équation aux différences, ou l'équation aux différences d'une équation différentielle, on ne sait aucunement par quel nombre et par quelle espèce de constantes et de fonctions arbitraires l'intégrale doit être complétée. Dans un Mémoire lu à l'Institut en l'an 8, M. *Biot* a considéré cette espèce particulière d'équations aux différences mêlées, qu'il a nommées *équations successives*. M. *Laplace* a aussi traité quelques équations (Mémoires de l'Académie, année 1779, *page 302*), dans lesquelles les différentielles et les différences se rapportent à des variables différentes; mais personne encore n'a donné l'intégrale complète d'une équation aux différences mêlées proprement dite, dans le cas où les différentielles et les différences se rapportent à la même variable.

Le but principal des recherches suivantes, est d'intégrer une classe particulière de ces équations, savoir, les équations linéaires comprises sous cette forme :

$$\frac{d.\Delta y}{dx} + p\frac{dy}{dx} + q\Delta y + my = n \ldots\ldots (A).$$

Les intégrales auxquelles nous parvenons, sont complétées par une

Digitized by Google

constante arbitraire et une fonction dont la différence est nulle, ainsi que cela aurait lieu si l'équation *(A)* était successive ; la seule différence qu'il y a, c'est que la fonction arbitraire se trouve engagée sous le signe intégral ou sous le signe différentiel ; ce qui empêche qu'on puisse éliminer successivement la constante et la fonction arbitraire.

Ces intégrales sont, par rapport à la fonction arbitraire qu'elles renferment, de la même forme que les intégrales des équations linéaires aux différences partielles ; et si l'on considère des équations non linéaires aux différences mêlées, il arrive aussi quelquefois que leurs intégrales sont représentées par le système de deux équations, entre lesquelles il faut éliminer un paramètre variable, et dont l'une est la différentielle de l'autre, prise par rapport à ce paramètre ; en sorte qu'on retrouve encore une analogie remarquable entre ces intégrales et celles des équations aux différences partielles. Nous en donnerons un exemple dans la suite de ce Mémoire.

La méthode que nous allons appliquer à l'équation *(A)*, est celle que M. *Laplace* a donnée dans les Mémoires de 1773, pour intégrer l'équation linéaire aux différences partielles,

$$\frac{d^2y}{dx\,dt} + p\frac{dy}{dx} + q\frac{dy}{dt} + my = n,$$

et cette extension est fondée sur ce qu'il existe entre les différentielles et les différences finies, la même indépendance qu'entre les différences partielles relatives à deux variables distinctes, de telle manière que l'on peut intervertir l'ordre de la caractéristique d et Δ, comme s'il s'agissait de différentielles prises par rapport à deux variables distinctes.

Dans les Mémoires de 1787, M. *Legendre* a étendu la même méthode à d'autres classes d'équations aux différences partielles. Nous pourrions également considérer les équations analogues aux différences mêlées, et même des équations aux différences mêlées et partielles ; mais ce serait dans un trop petit nombre de cas que nous parviendrions par ce moyen à intégrer ces équations. Nous nous bornerons donc à faire usage de la méthode de M. *Laplace* pour intégrer l'équation *(A)* seulement.

Digitized by Google

Observons encore, avant d'exposer cette méthode, qu'une équation aux différences mêlées d'un ordre quelconque, peut toujours être mise sous la forme d'une équation différentielle ou d'une équation aux différences, en y remplaçant les différences par leurs valeurs en différentielles, ou les différentielles par leurs valeurs en différences, valeurs qui sont données par les analogies connues entre les puissances et les différences; mais ces transformations ne facilitent en rien la recherche de l'intégrale, et c'est sous leur forme propre qu'il faut chercher à intégrer les équations aux différences mêlées, comme tous les autres genres d'équations aux différences; cependant il est bon de remarquer à cette occasion, que si l'on transforme une pareille équation, en une équation aux différences, il ne faudra pas dans l'intégrale de celle-ci considérer les constantes arbitraires comme des fonctions périodiques dont la différence est nulle, ainsi qu'on doit le faire en général.

Cette restriction provient de ce que les analogies entre les puissances et les différences que donnent les différentielles au moyen des différences, n'ont pas lieu pour ces sortes de fonctions; en effet, on a, d'après ces analogies,

$$\frac{d^n z}{dx^n} = [\log.(1+\Delta z)]^n,$$

en observant que l'on doit, dans le développement du second membre, remplacer une puissance quelconque de Δz telle que $(\Delta z)^m$, par la différence correspondante $\Delta^m z$. On aura donc, en développant ce second membre,

$$\frac{d^n z}{dx^n} = A\Delta^n z + B\Delta^{n+1} + C\Delta^{n+2} + \&c.$$

$A, B, C,$ &c. étant des coëfficiens numériques. Lors donc que z sera une fonction périodique dont la différence est nulle, on aura aussi $\frac{d^n z}{dx^n} = 0$, ce qui n'est point vrai, puisque les différentielles de ces sortes de fonctions sont des fonctions de la même nature.

Si, par exemple, on avait l'équation fort simple

$$\frac{dz}{dx} = \Delta z,$$

et

Digitized by Google

et que l'on y substituât pour $\frac{dz}{dx}$, sa valeur

$$\Delta z - \frac{\Delta^2 z}{2} + \frac{\Delta^3 z}{3} - \frac{\Delta^4 z}{4} + \&c.,$$

cette équation deviendrait

$$\frac{\Delta^2 z}{2} - \frac{\Delta^3 z}{3} + \frac{\Delta^4 z}{4} - \&c. = 0;$$

or, on satisfait à celle-ci, en prenant $\Delta^2 z = 0$, c'est-à-dire, $z = x\varphi + \downarrow$, φ et $\downarrow$ étant deux fonctions périodiques dont la différence est nulle; mais cette valeur de z est trop générale pour satisfaire à la proposée $\frac{dz}{dx} = \Delta z$, et l'on est obligé de prendre pour $\downarrow$ et φ des valeurs constantes.

Considérons maintenant l'équation *(A)*, dans laquelle p, q, m, n sont des fonctions quelconques de x, et où nous supposerons, pour plus de simplicité, que la différence Δx est égale à l'unité; supposition qu'on peut toujours se permettre, puisque si Δx était une fonction donnée de x, il serait facile, par une préparation convenable, de changer l'équation proposée, en une autre où la différence de la variable indépendante fût égale à l'unité.

En faisant $y + \Delta y = y_1$, et en conservant p et m pour représenter $p - 1$ et $m - q$, on peut mettre l'équation *(A)* sous cette autre forme,

$$\frac{dy_1}{dx} + p\frac{dy}{dx} + qy_1 + my = n \ldots\ldots (a),$$

qui sera plus commode pour les calculs suivans. En général, nous désignerons dans la suite de ce Mémoire, par U_1, ce que devient une fonction quelconque U de x, quand x se change en $x + 1$, en sorte que nous aurons toujours $U_1 = U + \Delta U$. Nous ferons de même $U_1 + \Delta U_1 = U_2$, $U_2 + \Delta U_2 = U_3$, &c.

Première suite de Transformations.

Je fais dans l'équation *(A)*, qu'il s'agit d'intégrer,

$$y_1 + py = z \ldots\ldots (1),$$

Digitized by Google

et la proposée devient

$$\frac{dz}{dx} + qz = \alpha y + n \ldots\ldots (2),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\alpha = \frac{dp}{dx} + pq - m.$$

Lorsque cette valeur de α sera nulle, on pourra intégrer l'équation (2), et ayant la valeur de z, le problème sera ramené à intégrer l'équation (1), ce qui ne présente aucune difficulté. Ce cas est celui où la proposée est l'équation différentielle d'une équation aux différences.

Lorsqu'on n'aura pas $\alpha = 0$, la valeur de z dépendra d'une équation semblable à la proposée, et qu'on obtiendra en éliminant y entre les équations (1) et (2). On trouve de cette manière,

$$\frac{dz_1}{dx} + \frac{p\alpha_1}{\alpha}\frac{dz}{dx} + q_1 z_1 + \left(\frac{pq\alpha_1 z_1}{\alpha} - \alpha_1\right) z = n' \ldots (b),$$

n' étant une quantité connue et égale à $n_1 + \frac{p\alpha_1}{\alpha} n$.

On traitera cette équation comme on a traité l'équation *(a)*, c'est-à-dire qu'on fera

$$z_1 + \frac{p\alpha_1}{\alpha} z = u \ldots\ldots (3);$$

et l'équation *(b)* deviendra

$$\frac{du}{dx} + q_1 u = \beta z + n' \ldots\ldots (4),$$

en faisant, pour abréger,

$$\beta = d.\frac{\frac{p\alpha_1}{\alpha}}{dx} + \frac{p\alpha_1}{\alpha}\Delta q + \alpha_1.$$

Quand cette valeur de β sera nulle, on pourra intégrer l'équation (4); puis, substituant la valeur de u dans l'équation (3), et intégrant, on aura la valeur de z. Cette valeur de z étant connue, l'équation (2) donnera, sans nouvelle intégration, la valeur de y ou l'intégrale cherchée.

Mais dans le cas où l'on n'aura pas $\beta = 0$, la valeur de u dépendra d'une équation de la même forme que les équations *(a)* et *(b)*, savoir,

Digitized by Google

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{p\alpha,\beta,}{\alpha\beta} \cdot \frac{du}{dx} + q_2 u_1 + \left(\frac{pq,\alpha,\beta,}{\alpha\beta} - \beta_1 \right) u = n'' \ldots (c),$$

équation que l'on trouve en éliminant z entre les équations (3) et (4), et dans laquelle n'' est une quantité connue dont il n'est pas nécessaire d'écrire ici la valeur.

Je continue ce procédé, et je fais

$$u_1 + \frac{p\alpha,\beta}{\alpha\beta} u = v; \ldots . (5);$$

l'équation *(c)* devient

$$\frac{dv}{dx} + q_2 v = \gamma u + n'' \ldots (6),$$

en faisant, pour abréger,

$$\gamma = d \cdot \frac{\frac{p\alpha,\beta,}{\alpha\beta}}{dx} + \frac{p\alpha,\beta,}{\alpha\beta} \cdot \Delta q_1 + \beta_1.$$

Lorsque cette valeur de γ sera nulle, on intégrera d'abord l'équation (6), et ensuite l'équation (5); ayant la valeur de u, l'équation (4) donnera celle de z; puis au moyen de l'équation (2), on aura la valeur y, c'est-à-dire, l'intégrale de la proposée.

Si l'on n'a pas $\gamma = 0$, la valeur de v dépendra d'une équation de la même forme que les équations *(a)*, *(b)* et *(c)*, et que l'on trouvera de la même manière. Cette équation est

$$\frac{dv}{dx} + \frac{p\alpha,\beta,\gamma,}{\alpha\beta\gamma} \cdot \frac{dv}{dx} + q_3 v_1 + \left(\frac{pq_2\alpha,\beta,\gamma,}{\alpha,\beta\gamma} - \gamma_1 \right) v = n''' \ldots (d),$$

n''' étant une quantité connue.

En faisant

$$v_1 + \frac{p\alpha,\beta,\gamma,}{\alpha\beta\gamma} v = w \ldots \ldots (7),$$

l'équation *(d)* prendra cette forme,

$$\frac{dw}{dx} + q_3 w = \delta v + n''' \ldots \ldots (8);$$

et l'on a

$$\delta = d \cdot \frac{\frac{p\alpha,\beta,\gamma,}{\alpha\beta\gamma}}{dx} + \frac{p\alpha,\beta,\gamma,}{\alpha\beta\gamma} \cdot \Delta q_2 + \gamma_1;$$

Quand cette valeur de δ sera nulle, on intégrera l'équation (8); ce

Digitized by Google

qui donnera la valeur de w. Substituant dans l'équation (7), et intégrant de nouveau, on aura la valeur de v. Cette valeur étant connue, on en déduira, sans nouvelle intégration, la valeur de y ou l'intégrale demandée. En effet, par de simples substitutions, l'équation (6) donnera la valeur de u, au moyen de celle de v, puis l'équation (4) donnera la valeur de z, au moyen de celle de u, et, enfin, l'équation (2) donnera la valeur de y, au moyen de celle de z.

Ces quatre transformations suffisent pour l'exposition de notre méthode. On voit que, par son moyen, on parviendra à intégrer l'équation *(a)*, toutes les fois que dans la suite de quantités α, β, γ, δ, &c. dont la loi est facile à saisir, il y en aura une égale à zéro. Lorsque cette suite de quantités prolongée à l'infini ne renfermera aucun terme égal à zéro, l'intégrale de l'équation *(a)* ne pourra être trouvée par la méthode précédente, et il faudra recourir à une autre suite de transformations que nous allons seulement indiquer.

Seconde suite de Transformations.

Je fais d'abord

$$\frac{dy}{dx} + q'y = t \ldots\ldots (1),$$

q' désignant la valeur de q qui répond à $x - 1$; l'équation *(a)* devient

$$t_{,} + pt = ey + u \ldots\ldots (2),$$

en faisant, pour abréger,

$$e = pq' - m.$$

On pourra intégrer l'équation (2) quand cette valeur de e sera nulle. Substituant ensuite la valeur de t dans l'équation (1), et intégrant, on aura la valeur de y ou l'intégrale cherchée. C'est dans ce cas que la proposée est l'équation aux différences d'une équation différentielle, et l'on voit que la condition pour que cela ait lieu, n'est pas la même en général que la condition $\alpha = 0$, pour que la proposée soit l'équation différentielle d'une équation aux différences. Lorsque ces deux

Digitized by Google

conditions coïncident, on peut parvenir à l'intégrale de deux manières différentes, et qui doivent conduire à des résultats équivalens. Nous en donnerons plus bas un exemple.

Quand on n'aura pas $e = 0$, la valeur de t dépendra d'une équation semblable à la proposée que l'on trouvera en éliminant y entre les équations (1) et (2). On appliquera à cette équation la même transformation qu'à l'équation *(a)*, et l'on aura deux équations de cette forme,

$$\frac{dt}{dx} + kt = s \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$s' + ps = ft + N \ldots\ldots (4);$$

s étant une nouvelle variable, les coëfficiens k, f et le terme N étant des fonctions données de x, et le coëfficient p étant le même que dans l'équation (2).

Si l'on a $f = 0$, on intégrera l'équation (4), puis l'équation (3); et ayant la valeur de t, l'équation (2) donnera, sans nouvelle intégration, la valeur de y, ou l'intégrale cherchée.

Si l'on n'a pas $f = 0$, on éliminera t entre les équations (3) et (4), et l'on aura pour déterminer s, une équation semblable à la proposée. On décomposera cette équation en deux autres de cette forme,

$$\frac{ds}{dt} + ls = r \ldots\ldots\ldots (5),$$

$$r' + pr = gs + N' \ldots\ldots (6),$$

dans lesquelles est une nouvelle variable, l, g et N' sont des fonctions données de x, et p est le même coëfficient que dans les équations précédentes.

Lorsqu'on aura $y = 0$, on intégrera l'équation (6), et ensuite l'équation (5). Au moyen de la valeur de s, et en faisant usage des équations (4) et (2), on obtiendra, sans nouvelle intégration, et par de simples substitutions, la valeur de y, ou l'intégrale demandée.

Dans le cas où g ne sera pas nul, on éliminera s entre les équations (5) et (6), et l'on aura pour déterminer r une équation de même forme que la proposée.

On continuera ces transformations jusqu'à ce que dans la suite des

Digitized by Google

quantités $e, f, g,$ &c. on soit parvenu à un terme égal à zéro; et il est évident qu'alors, après avoir intégré d'abord une équation aux différences, et ensuite une équation différentielle, on obtiendra par une suite de substitutions, la valeur de y, c'est-à-dire, l'intégrale de l'équation *(a)*. Si la suite des quantités $e, f, g,$ &c., prolongée à l'infini, ne renferme aucun terme égal à zéro, il en faudra conclure que les transformations qu'on vient d'indiquer ne peuvent conduire à l'intégrale demandée; en sorte que s'il arrive en même temps qu'il n'y ait aucune des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. égale à zéro, il n'existera aucune méthode connue qui puisse donner l'intégrale de l'équation *(a)*; et il est naturel de penser qu'alors cette équation n'est point intégrable sous forme finie.

Formes des intégrales que l'on obtient par la méthode précédente.

Il est facile de voir que selon que l'équation *(a)* s'intégrera par une, ou deux, ou trois, &c. transformations de la première suite, c'est-à-dire, selon qu'on aura $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$, ou $\gamma = 0$, &c., l'intégrale aura ces différentes formes,

$$y = A + Bc + C\varphi \ldots\ldots \text{ quand } \alpha = 0,$$

$$y = A' + B'c + C'\varphi + D'\frac{d\varphi}{dx} \ldots\ldots \text{ quand } \beta = 0,$$

$$y = A'' + B''c + C''\varphi + D''\frac{d\varphi}{dx} + E''\frac{d^2\varphi}{dx} \ldots \text{ quand } \gamma = 0,$$

et ainsi de suite; $A, B, C, A', B', C',$ &c. représentant des fonctions déterminées de x, c étant une constante arbitraire, et φ une fonction périodique dont la différence est nulle.

On voit de même que si l'équation *(a)* s'intègre par une, ou deux, ou trois, &c. transformations de la seconde suite, l'intégrale aura ces différentes formes,

$$y = A + Bc + B\int P\varphi dx \ldots\ldots \text{ quand } e = 0,$$

$$y = A' + B'c + C'\int Q\varphi dx + D'\int Q_1\varphi dx \ldots\ldots \text{ quand } f = 0,$$

$$y = A'' + B''c + C''\int R\varphi dx + D''\int R_1\varphi dx + E''\int R_2\varphi dx \ldots \text{ quand } g = 0,$$

Digitized by Google

et ainsi de suite ; P, Q, R, &c. et les coëfficiens A, B, A', B', C', &c. représentant des fonctions déterminées de x, ϵ étant une constante arbitraire, et φ une fonction périodique dont la différence est nulle.

Nous savons donc maintenant comment est composée l'intégrale d'une équation aux différences mêlées, dans d'autres cas que celui où la proposée est l'équation différentielle d'une équation aux différences, ou réciproquement. Dans ce cas il est visible, *à priori*, que l'intégrale doit renfermer une constante arbitraire et une fonction périodique dont la différence est nulle. Or les résultats ci-dessus nous montrent que cela a encore lieu dans un grand nombre d'autres cas, et que la seule différence qu'il y a, ainsi que nous l'avons annoncé au commencement de ce mémoire, c'est que la fonction arbitraire se trouve engagée sous le signe intégral ou sous le signe différentiel, comme dans les intégrales des équations linéaires aux différences partielles.

On pourrait croire que les intégrales obtenues par la seconde suite de transformations, renferment plusieurs constantes arbitraires ; par exemple, l'intégrale que l'on obtient quand $g = 0$, semble devoir contenir trois constantes arbitraires, outre la constante c, à cause des trois intégrales $SR\varphi dx$, $SR_{,}\varphi dx$, $SR_{,,}\varphi dx$, qui se trouvent dans la valeur de y. Mais si l'on examine avec attention comment on forme cette valeur, il sera facile de s'assurer, 1.° que ces trois intégrales doivent être complétées par la même constante arbitraire ; 2.° que l'on a entre les coëfficiens B'', C'', D'', E'', l'équation

$$B'' = C'' + D'' + E'';$$

en sorte que si l'on ajoute une constante c', à chacune des intégrales $SR\varphi dx$, $SR_{,}\varphi dx$, $SR_{,,}\varphi dx$, cette constante se réunira à la constante c, et la valeur de y ne changera pas de forme. Au reste les exemples que nous allons donner, acheveront d'éclaircir les difficultés qui pourraient rester sur la forme des intégrales de l'équation *(a)*.

Digitized by Google

EXEMPLE PREMIER.

On propose d'intégrer l'équation

$$\frac{dy_{,}}{dx} + a\frac{dy}{dx} + by_{,} + aby = 0;$$

dans laquelle a et b sont des constantes quelconques, et où l'on suppose $\Delta x = 1$.

Pour cela, je fais

$$y_{,} + ay = z,$$

et la proposée devient

$$\frac{dz}{dx} + bz = 0;$$

d'où l'on tire, en intégrant, $z = ce^{-bx}$; substituant cette valeur de z dans l'équation $y_{,} + ay = z$, et intégrant de nouveau, on trouve pour l'intégrale demandée

$$y = ce^{-bx} + \Phi(-a)^{x},$$

c étant une constante arbitraire, et Φ une fonction périodique dont la différence est nulle. On peut obtenir cette même intégrale par une autre transformation : si l'on fait

$$\frac{dy}{dx} + by = t,$$

la proposée devient

$$t_{,} + at = 0,$$

dont l'intégrale est $t = \Phi.(-a)^{x}$, Φ désignant une fonction périodique dont la différence est nulle ; cette valeur de t étant substituée dans l'équation $\frac{dy}{dx} + by = t$, et cette équation étant ensuite intégrée, on trouve

$$y = ce^{-bx} + e^{-bx}\int \Phi . e^{bx}(-a)^{x}.dx.$$

Pour faire coïncider cette valeur de y, avec celle que l'on a trouvée en premier lieu, il faut effectuer l'intégrale $\int \Phi\, e^{bx}(-a)^{x}\,dx$, ce qui devient facile en remplaçant la fonction Φ par une série finie ou infinie,

Digitized by Google

infinie, de termes de cette forme $A e^{2n\pi x\sqrt{(-1)}}$, A étant un coëfficient constant et arbitraire, π désignant la demi-circonférence pour le rayon un, et n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Chacun de ces termes étant multiplié par $(-a)^x e^{bx} dx$, et ensuite intégré, donnera un terme de même forme; par conséquent l'intégrale $\int \Phi . e^{bx} (-a)^x dx$, sera égale au facteur $e^{bx}(-a)^x$, multiplié par une fonction de même nature que la fonction Φ, et en continuant de désigner cette fonction par Φ, la seconde valeur de y deviendra

$$y = c e^{-bx} + \Phi.(-a)^x.$$

Si le coëfficient de y dans la proposée, au lieu d'être ab, comme nous venons de le supposer, était une autre constante quelconque k, ensorte qu'on eût

$$\frac{dy}{dx} + a\frac{dy}{dx} + by + ky = 0,$$

il ne serait plus possible d'obtenir sous forme finie l'intégrale de cette équation; mais il serait facile d'y satisfaire en prenant $y = Ae^{mx}$, A étant une constante arbitraire, et l'exposant m étant déterminé au moyen de l'équation

$$me^m + am + be^m + k = 0.$$

Quand on parviendra à tirer de cette équation une ou plusieurs valeurs de m, réelles ou imaginaires, chacune de ces valeurs en donnera une pour y, et la somme des valeurs de y, multipliées chacune par une constante arbitraire, satisfera encore à la proposée, à cause de sa forme linéaire; de cette manière on pourra former l'intégrale complète que nous avons trouvée dans le cas particulier où l'on a $k = ab$. En effet, l'équation d'où dépend la valeur de m se décompose alors en ces deux facteurs

$$m + b = 0, \text{ et } e^m + a = 0;$$

le premier donne $m = -b$, et l'on tire du second $m = \log.(-a) + \log. 1$, ce qui équivaut à une infinité de valeurs, puisque l'unité a une infinité de logarithmes. Ces logarithmes sont tous compris

Digitized by Google

dans la formule log. $1 = 2n\pi\sqrt{(-1)}$, π désignant la demi-circonférence pour le rayon un, et n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. On aura donc, en employant toutes ces valeurs de m

$$y = ce^{-bx} + (-a)^x[(Ae^{2\pi x\sqrt{(-1)}} + Be^{4\pi x\sqrt{(-1)}} + \&c. + A'e^{-2\pi x\sqrt{(-1)}} + B'e^{-4\pi x\sqrt{(-1)}} + \&c.)],$$

ou ce qui revient au même

$$y = ce^{-bx} + \Phi(-a)^x,$$

Φ désignant comme plus haut, une fonction périodique dont la différence est nulle.

En général, si l'on a une équation aux différences mêlées d'un ordre quelconque, linéaire et à coëfficiens constans, on y pourra satisfaire en prenant $y = Ae^{mx}$; A restera une constante arbitraire, et l'exposant m sera donné par une équation transcendante renfermant m et e^m. Lorsque cette équation se décomposera en deux facteurs rationnels, dont l'un renfermera seulement e^m, et dont l'autre ne renfermera que m, on pourra former l'intégrale complète de la proposée, et cette intégrale sera

$$y = Ae^{mx} + A'e^{m'x} + A''e^{m''x} + \&c. + \Phi.p^x + \Phi'.p'^x + \Phi''.p''^x + \&c.$$

m, m', m'', &c. étant les valeurs de m provenant du facteur rationnel en m'; p, p', p'', &c. étant les valeurs de e^m qui proviennent du facteur rationnel en e^m; A, A', A'', &c., représentant des constantes arbitraires, et Φ, Φ', Φ'', &c., des fonctions périodiques dont la différence est nulle.

EXEMPLE DEUXIÈME.

Soit pour second exemple, l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + (x-1)y_1 - a\frac{dy}{dx} - axy = 0,$$

dans laquelle a est une constante quelconque, et $\Delta x = 1$.

En faisant $y_1 - ay = z$, cette équation devient $\frac{dz}{dx} + (x-1)z = ay$;

Digitized by Google

éliminant y, on trouve pour déterminer z, l'équation

$$\frac{dz_1}{dx} + xz_1 - a\frac{dz}{dx} - axz = 0;$$

qui se réduit à $\frac{du}{dx} + xu = 0$, si l'on fait $z_1 - az = u$. L'équation d'où dépend la valeur de u, donne en l'intégrant $u = ce^{-\frac{x^2}{2}}$, c étant la constante arbitraire. Substituant cette valeur de u dans l'équation $z_1 - az = u$, et intégrant de nouveau, on trouve

$$z = \varphi.a^x + c.a^x \Sigma\left(e^{\frac{-x^2}{2}} a^{-x}\right),$$

φ désignant une fonction périodique dont la différence est nulle.

La valeur de z étant connue, on aura celle de y au moyen de l'équation $ay = \frac{dz}{dx} + (x-1)z$. On trouve de cette manière, pour l'intégrale de la proposée,

$$y = \varphi.a^x(x - 1 + \log.a) + \frac{d\varphi}{dx}a^x + c.a^x(x - 1 + \log.a).\Sigma\left(e^{\frac{-x^2}{2}} a^{-x}\right)$$

$$- C.a^x.\Sigma\left[e^{\frac{-x^2}{2}}.a^{-x}(x + \log.a)\right];$$

et l'on doit observer que dans cette valeur de y, les deux intégrales indiquées par le signe Σ, ne sont point indépendantes l'une de l'autre: la seconde doit être la différentielle de la première divisée par dx, de sorte que si l'on ajoute à la première une fonction périodique, représentée par p, il faudra ajouter $\frac{dp}{dx}$ à la seconde; alors la fonction p se réunira à la fonction φ, et la valeur de y ne renfermera qu'une seule fonction arbitraire et la constante c.

Si l'on faisait usage de l'équation $y_1 - ay = z$ pour remonter de la valeur de z, à la valeur de y, au lieu d'employer, comme nous l'avons fait, l'équation $ay = \frac{dz}{dx} + (x-1)z$, on aurait une valeur de y qui renfermerait la constante c, la fonction φ, et une seconde

Digitized by Google

fonction périodique; mais en effectuant le calcul, on verra que cette valeur serait trop générale pour satisfaire à la proposée; qu'elle n'y satisferait qu'avec quelques restrictions, qui réduiraient les deux fonctions périodiques à une seule, et la valeur de y à celle que nous avons trouvée plus haut. On conçoit, en effet, que la proposée étant remplacée par le système des deux équations $y_1 - ay = z$ et $ay = \frac{dz}{dx} + (x-1)z$, il ne suffit pas que la valeur de y satisfasse seulement à l'une de ces équations, il faut qu'elle satisfasse à-la-fois à toutes deux; et comme il n'existe qu'une seule valeur de y qui puisse satisfaire à la seconde, il s'ensuit que c'est de cette équation qu'il faut tirer la valeur de y, quand celle de z est connue.

Il est facile de voir que l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + (x-n)y_1 - a\frac{dy}{dx} - axy = 0,$$

dans laquelle n est un nombre entier positif quelconque, s'intégrera comme celle que nous venons de considérer, mais seulement après un nombre $n+1$ de transformations.

EXEMPLE TROISIÈME.

Je prendrai pour dernier exemple l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{a\,dy}{dx} + (x+2)y_1 - axy = 0,$$

dans laquelle on a $\Delta x = 1$.

Pour l'intégrer, je fais $\frac{dy}{dx} + (x+1)y = z$, ce qui la réduit à $z_1 - az = ay$; éliminant y, on trouve

$$\frac{dz_1}{dx} - a\frac{dz}{dx} + (x+1)z_1 - axz = 0,$$

équation qui devient $u_1 - au = 0$, quand on fait $\frac{dz}{dx} + xz = 0$. On aura donc en intégrant $u = \Phi . a^x$, Φ désignant une fonction périodique dont la différence est nulle. Substituant cette valeur de u

Digitized by Google

dans l'équation $\frac{dz}{dx} + xz = u$, et intégrant de nouveau, on trouve

$$z = ce^{\frac{-x^2}{2}} + e^{\frac{-x^2}{2}} \int \varphi . a^x e^{\frac{x^2}{2}} dx,$$

c étant la constante arbitraire.

Quand la valeur de z est connue, c'est l'équation $ay = z, - az,$ et non pas l'équation $\frac{dy}{dx} + (x+1)y = z,$ qu'il faut employer pour remonter à la valeur de y; et de cette manière on trouve, pour l'intégrale cherchée,

$$y = c\left(e^{\frac{-(x+1)^2}{2}} - e^{\frac{-x^2}{2}}\right) + \frac{1}{a} e^{\frac{-(x+1)^2}{2}} \int \varphi . a^{x+1} e^{\frac{(x+1)^2}{2}} dx$$

$$- e^{\frac{-x^2}{2}} \int \varphi . a^x e^{\frac{x^2}{2}} dx,$$

dans laquelle $\int \varphi . a^{x+1} e^{\frac{(x+1)^2}{2}} dx$ provient de $\int \varphi . a^x e^{\frac{x^2}{2}} dx$, en y changeant x en $x + 1$, de manière que ces deux intégrales doivent être complétées par la même constante arbitraire qui est ici la constante c.

On intégrerait de même après un nombre n de transformations, l'équation $\frac{dy_n}{dx} - a\frac{dy}{dx} + (x + n)y_n - axy = 0$, dans laquelle n est un nombre entier positif quelconque, et qui comprend comme cas particulier celle que nous venons de considérer.

Solution d'un Problème de géométrie, dépendant d'une Équation non linéaire aux Différences mêlées.

PARMI tous les problèmes de géométrie que l'on a résolus par des considérations particulières, et qui étant mis directement en équation, conduisent aux différences mêlées, nous avons choisi le suivant, dont *Euler* a donné une solution différente de la nôtre, mais qui conduit au même résultat. (*Voyez* les Mémoires de Pétersbourg, année 1764, *page 135.*) Ce problème nous suffira pour montrer l'usage des équations aux différences mêlées, dans les questions de géométrie; ceux qui desi-

Digitized by Google

reront de plus grands détails sur ce sujet, pourront consulter le Mémoire de M. *Biot*, cité au commencement de celui-ci.

Trouver une courbe telle que le carré de la normale en un point quelconque, surpasse le carré de l'ordonnée perpendiculaire à l'axe des abscisses, élevée par le pied de cette normale, d'une quantité constante et égale à a.

En appelant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque, et en représentant par $y = fx$ l'équation de la courbe cherchée, on aura $y\frac{dy}{dx}$ pour l'expression de la sous-normale, et $y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ pour celle de la normale ; $x+\frac{ydy}{dx}$ sera l'abscisse du pied de la normale et $f\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$ sera l'ordonnée élevée par ce point ; donc

$$y^2+y^2\frac{dy^2}{dx^2}=a+\left[f\left(x+\frac{ydy}{dx}\right)\right]^2 \ldots (a)$$

sera l'équation du problème ; et l'on voit que cette équation est aux différences mêlées, la différence Δx étant égale à $\frac{ydy}{dx}$; en sorte qu'ici cette différence dépend de la fonction même qu'il s'agit de déterminer.

Pour intégrer une équation dans laquelle Δx est variable, il faut, d'après le procédé connu, et que l'on doit à M. *Laplace*, transformer cette équation en une autre, dans laquelle la différence de la variable indépendante soit égale à l'unité.

Soit donc $x = \varphi z$, z étant une nouvelle variable, et φz une fonction de z que nous déterminerons au moyen de cette équation

$$x+y\frac{dy}{dx}=\varphi(z+1).$$

Soit de plus $fx=f(\varphi z)=\downarrow z$, et par conséquent $f\left(x+\frac{ydy}{dx}\right)$ $=f[\varphi(z+1)]=\downarrow(z+1)$; l'équation précédente et l'équation *(a)* deviendront

$$\varphi+\frac{\downarrow d\downarrow}{d\varphi}=\varphi_1, \text{ et } \downarrow^2+\frac{\downarrow^2 d\downarrow^2}{d\varphi^2}=\downarrow_1^2+a,$$

en conservant seulement les caractéristiques de chaque fonction pour

Digitized by Google

désigner cette fonction, et en employant φ_1 et $\downarrow_1$ au lieu de $\varphi + \Delta\varphi$ et de $\downarrow + \Delta\downarrow$.

Nous avons donc substitué à l'équation *(a)* le système de deux équations entre trois variables $\downarrow$, φ et z; et la question est maintenant ramenée à éliminer p ou φ entre ces deux équations, pour intégrer ensuite l'équation finale. Or en vertu de la première équation, que l'on peut écrire ainsi,

$$d\varphi\,(\varphi_1 - \varphi) = \downarrow d\downarrow \ldots\ldots\ldots (1),$$

la seconde devient

$$(\varphi_1 - \varphi)^2 = \downarrow_1^2 - \downarrow^2 + a \ldots\ldots (2),$$

et sa différentielle $(\varphi_1 - \varphi)\,d\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi)\,d\varphi = \downarrow_1 d\downarrow_1 - \downarrow d\downarrow$, se réduit à

$$(\varphi_1 - \varphi)\,\varphi_1 = \downarrow_1 d\downarrow_1;$$

retranchant cette équation de l'équation (1), après avoir mis dans celle-ci $z+1$ au lieu de z, il vient

$$(\varphi_{11} - \varphi_1)\,d\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi)\,d\varphi_1 = 0,$$

équation qui se décompose en deux facteurs

$$d\varphi_1 = 0 \text{ et } \Delta^2\varphi = 0.$$

Il est inutile d'avoir égard au facteur $d\varphi_1 = 0$, car on en tirerait φ_1 ou $\varphi =$ constante; valeur comprise dans l'intégrale de l'autre facteur, $\Delta^2\varphi = 0$: cette intégrale est

$$\varphi = g\,z + h,$$

g et h étant des fonctions de cos. $2\pi z$ et sin. $2\pi z$, qui ne changent pas de valeur quand z devient $z+1$.

Substituant cette valeur de φ dans l'équation (2), on trouve

$$\Delta.\downarrow^2 + a = g^2;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\downarrow^2 + a\,z = g^2\,z + k,$$

k étant une troisième fonction périodique.

Les trois fonctions g, h et k ne sont pas indépendantes entre elles;

Digitized by Google

car il faut que les valeurs trouvées pour $\downarrow^2$ et Φ satisfassent à l'équation (1); et en les substituant dans cette équation, on trouve, toutes réductions faites,

$$g^2 + 2gh' = k' - a;$$

h' et k' désignant, pour abréger, les coëfficiens différentiels $\frac{dh}{dz}$ et $\frac{dk}{dz}$. En résolvant cette équation par rapport à g, il vient

$$g = -h' + \sqrt{(h'^2 + k' - a)};$$

les valeurs les plus générales de Φ et de $\downarrow^2$, qui satisfassent aux équations (1) et (2), sont donc :

$$\Phi = h + z\,[-h' + \sqrt{(h'^2 + k' - a)}]. \ldots\ldots\ldots (3),$$

$$\downarrow^2 = k + z\,[2h'^2 + k' - 2a - 2h'\sqrt{(h'^2 + k' - a)}]. \ldots (4);$$

de sorte que si l'on remet x à la place de Φ et y à la place de $\downarrow$, que l'on prenne pour h et pour k des fonctions déterminées de cos. $2\pi z$ et sin. $2\pi z$, et que l'on élimine z, on aura entre x et y l'équation d'une courbe qui résout le problème proposé. Si, par exemple, on suppose constantes les quantités h et k, les valeurs de x et de y^2 deviendront

$$x = h + z\sqrt{(-a)} \text{ et } y^2 = k - 2az;$$

d'où l'on tire, en éliminant z,

$$y^2 = k - 2h\sqrt{(-a)} + 2x\sqrt{(-a)};$$

équation qui donne une courbe imaginaire quand a est positif, et qui appartient à la parabole ordinaire, quand a est négatif; et en effet il est facile de vérifier que cette courbe satisfait à la question.

Il se présente plusieurs observations importantes à faire sur cette analyse, et sur les courbes représentées par le système des équations (3) et (4).

1.° Nous avons représenté l'abscisse x d'un point quelconque par Φz, l'abscisse $x + \frac{ydy}{dx}$ du pied de la normale correspondante à ce point, par $\Phi(z+1)$, et par conséquent la sous-normale $y\frac{dy}{dx}$ par $\Phi(z+1) - \Phi z$; or, d'après l'équation (3), on a

$$\Phi(z+1) - \Phi z = -h' + \sqrt{(h'^2 + k' - a)};$$

la

Digitized by Google

la sous-normale est donc une fonction de z qui ne change pas quand z devient $z+1$; d'où il suit que les sous-normales qui correspondent aux abscisses Φz, $\Phi(z+1)$, $\Phi(z+2)$, &c., sont toutes égales entre elles. Mais il n'en faut pas conclure que toutes les courbes qui jouissent de cette propriété, résolvent le problème qui nous occupe; car, par exemple, dans la parabole ordinaire, la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre, et cependant cette courbe ne satisfait à la question que dans le seul cas où son paramètre est égal à $2\sqrt{(-a)}$.

On conçoit en effet que l'expression ci-dessus de la sous-normale ne peut pas devenir égale à une constante absolue, si ce n'est à la constante $\sqrt{(-a)}$; car si l'on pose l'équation

$$-h'+\sqrt{(h'^2+k'-a)}=b,$$

il s'ensuivra, en faisant disparaître le radical,

$$2h'b+b^2=k'-a;$$

et en intégrant, on aura

$$2hb+(b^2+a)z+c=k;$$

or k et h étant des fonctions périodiques, il faut, pour que cette équation subsiste, qu'elle ne renferme pas le terme $(b^2+a)z$, il faut donc qu'on ait $b=\sqrt{(-a)}$.

2.° Le système des équations (3) et (4) peut être changé en un autre, dans lequel l'une des deux équations soit la différentielle de la seconde prise par rapport à z. En effet, en multipliant l'équation (3) par $2h'$, et l'ajoutant ensuite à l'équation (4), on trouve d'abord

$$y^2+2h'x=k+2hh'+z(k'-2a);\ldots\ldots(5);$$

faisant disparaître le radical dans l'équation (3), il vient

$$x^2-2hx+2h'zx-2hh'z+h^2=z^2(k'-a);$$

retranchant celle-ci de la précédente, multipliée par z, on trouve

$$y^2z-x^2+2hx=kz+h^2-az^2\ldots\ldots(6).$$

Si donc on substitue aux équations (3) et (4) le système des équations (5) et (6), on voit que l'équation (5) est la différentielle de l'équation (6)

Digitized by Google

prise par rapport à z, et l'on a l'exemple d'une forme d'intégrale analogue à celle des équations non linéaires aux différences partielles.

L'équation (6) en y considérant z comme une constante arbitraire, appartient à une infinité d'ellipses ou d'hyperboles, que l'on peut partager en une infinité de séries, en prenant successivement pour h et pour k différentes fonctions déterminées de cos. $2\pi z$ et sin. $2\pi z$; la ligne de contact de chacune de ces séries de courbes est donnée par le système des équations (5) et (6); d'où il suit qu'on peut se représenter les courbes qui résolvent le problème proposé, comme engendrées par les intersections successives d'une suite d'ellipses ou d'hyperboles qui ont toutes un de leurs axes sur celui des abscisses, et qui diffèrent entre elles par la position du centre et par la grandeur des axes.

3.° Il est possible que les équations (3) et (4) ou les équations équivalentes (5) et (6) ne renferment pas toutes les solutions de l'équation (a) : si la valeur de y en fonction de x était telle qu'en la substituant dans $x + y\frac{dy}{dx}$, cette quantité devînt indépendante de x, il ne serait plus permis de faire à-la-fois $x = \Phi z$ et $x + y\frac{dy}{dx} = \Phi(z+1)$; les solutions de l'équation (a), s'il en existe, pour lesquelles $x + y\frac{dy}{dx}$ est une constante, doivent donc échapper à la méthode d'intégration dont nous avons fait usage; et par conséquent il faut essayer directement si l'équation

$$x + y\frac{dy}{dx} = b,$$

b étant une constante, satisfait à l'équation (a). On en déduit en intégrant

$$x^2 + y^2 = 2bx + c \ldots\ldots (7);$$

c étant la constante arbitraire; l'équation (a) devient alors

$$(b-x)^2 + 2bx + c - x^2 = B^2 + a,$$

B^2 désignant la valeur de y^2 qui répond à $x = b$, laquelle valeur, d'après l'équation (7), est égale à $b^2 + c$, ce qui réduit l'équation précédente à $a = 0$.

Digitized by Google

Ainsi les équations (5) et (6) comprennent en général toutes les courbes qui résolvent le problème proposé ; mais dans le cas particulier où l'on a $a = 0$, c'est-à-dire dans le cas où il s'agit de *trouver une courbe telle que la normale en un point quelconque, soit égale à l'ordonnée élevée par le pied de cette normale ;* dans ce cas, dis-je, il faut joindre à ces courbes le cercle donné par l'équation (7). Et en effet, dans un cercle dont le centre est sur l'axe des abscisses, le pied de toutes les normales est le centre du cercle, et toutes les normales sont égales au rayon, ainsi que l'ordonnée élevée par le centre.

Digitized by Google

MÉMOIRE.

Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, *et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque.*

Par M. AMPÈRE, Répétiteur à l'École polytechnique.

TOUTE fonction de deux variables x et i, se change, lorsqu'on donne à i une valeur déterminée, en une fonction de x, à moins qu'elle ne prenne alors une valeur infinie ou nulle pour toutes les valeurs de x.

Je dis pour toutes les valeurs de x, car si cette fonction ne devenait nulle ni infinie quand on donne à i cette valeur déterminée, que pour certaines valeurs de x, ce n'en serait pas moins une fonction de x, seulement cette fonction deviendrait nulle ou infinie pour ces valeurs de x.

Lorsque la fonction de x et de i ne se présente pas sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, quand on substitue à la place de i la valeur qu'on veut lui donner, il est toujours aisé de voir lequel de ces différens cas a lieu; mais lorsque cela arrive, on est obligé, pour le savoir, d'avoir recours à la considération des propriétés particulières à la fonction dont on s'occupe.

Je me propose d'abord de démontrer que la fonction de x et de i

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

qui exprime le rapport de la différence de deux valeurs x et $x+i$ d'une variable, et de la différence des deux valeurs correspondantes d'une quelconque de ses fonctions $f(x)$, ne peut devenir ni nulle ni infinie pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on fait $i = 0$, supposition

Digitized by Google

dans laquelle l'expression précédente devient $\frac{0}{0}$; il résultera nécessairement de cette démonstration, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

se réduit, quand $i = 0$, à une fonction de x. Cette fonction, qui dépend évidemment de $f(x)$, et que M. *Lagrange* a nommée en conséquence sa fonction dérivée, est, comme on sait, de la plus grande importance dans les mathématiques, et sur-tout dans leur application à la géométrie et à la mécanique ; nous la représenterons, comme cet illustre mathématicien, par $f'(x)$, et notre premier but sera d'en démontrer l'existence.

Cette démonstration est d'autant plus nécessaire, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

est la seule des fonctions qu'on trouve, en donnant diverses valeurs constantes à m dans

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i^m},$$

qui ne devienne ni nulle ni infinie lorsque $i = 0$, si ce n'est pour des valeurs particulières de x, quoique toutes ces fonctions se présentent alors sous la même forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Il est évident, en effet, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i^m}$$

est égal à

$$\frac{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}}{i^{m-1}}$$

et devient par conséquent nul ou infini, suivant que m est plus petit ou plus grand que 1, quand i s'évanouit, toutes les fois que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

reste fini ; ce qui arrive toujours, comme nous allons le démontrer, à l'exception de certaines valeurs particulières et isolées de x.

Digitized by Google

Cette propriété de la fonction

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

est d'autant plus remarquable, qu'elle sert de base, comme il est aisé de s'en assurer, à toute la partie des mathématiques connue sous le nom de *mathématiques transcendantes.*

Observons d'abord que pour qu'une fonction réelle (*) de x et de i devienne nulle ou infinie quand $i = 0$, il faut que cette fonction diminue ou augmente à mesure que i diminue, de manière à devenir dans le premier cas et pour une valeur de i assez petite, moindre que toute grandeur donnée, et à surpasser dans le second cas toute grandeur donnée, pourvu qu'on assigne à i une valeur assez petite pour cela.

En sorte que si la propriété que nous venons de dire appartenir à la fonction

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

n'avait pas lieu pour toutes les valeurs de x, si ce n'est pour de certaines valeurs particulières et isolées de cette variable, on n'aurait qu'à donner successivement à x deux valeurs a et k, prises dans l'intervalle où cette propriété n'aurait pas lieu, pour que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

diminuât ou crût à mesure que i se rapprocherait de zéro, de manière à devenir moindre ou plus grande qu'une quantité prise à volonté.

Il s'ensuivrait donc qu'en donnant à i une valeur plus petite que toutes les valeurs qu'il faudrait lui assigner pour cela depuis $x = a$ jusqu'à $x = k$,

(*) Une fonction pourrait passer d'une valeur finie à une valeur infinie ou nulle, sans croître ou diminuer indéfiniment si elle devenait imaginaire dans l'intervalle; mais cela ne saurait arriver à la fonction que nous considérons

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

qui ne peut devenir imaginaire que dans le cas où $f(x)$ cesserait aussi d'être réelle, et où il n'y aurait par conséquent plus lieu aux recherches qui sont l'objet de ce Mémoire.

Digitized by Google

aucune des valeurs de x qui sont comprises dans cet intervalle, ne pourrait rendre la fonction que nous examinons, égale à cette quantité prise à volonté, et par conséquent si nous démontrons que cela n'est pas possible à l'égard de cette fonction

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

la propriété que nous avons dit lui appartenir sera complétement prouvée.

Soient A et K les valeurs de $f(x)$ correspondantes à $x=a$, et $x=k$, on pourra toujours supposer que a et k ont été pris de manière que $f(x)$ ne devienne point infini dans l'intervalle, et qu'on n'ait ni $A=K$, ni $a=k$, afin que

$$\frac{K-A}{k-a}$$

ne soit ni nul ni infini, et qu'on puisse prendre cette quantité pour celle au-dessus ou au-dessous de laquelle on pourrait toujours amener $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, en donnant à i une valeur assez petite pour cela.

Représentons par B, C, D, &c., les valeurs de $f(x)$ correspondantes aux valeurs de x, intermédiaires entre a et k, que nous désignerons par b, c, d, &c., en supposant que l'ordre dans lequel nous les rangeons ici, est celui de leurs grandeurs; e, par exemple, étant intermédiaire entre a et k, il sera d'abord aisé de s'assurer que des deux fonctions

$$\frac{K-E}{k-e} \text{ et } \frac{E-A}{e-a},$$

l'une est plus grande et l'autre plus petite que

$$\frac{K-A}{k-a};$$

car on a

$$\frac{K-E}{k-e}-\frac{K-A}{k-a}=\frac{aE-Ae+Ak-aK+eK-Ek}{(k-e)(k-a)},$$

et

$$\frac{K-A}{k-a}-\frac{E-A}{e-a}=\frac{aE-Ae+Ak-aK+eK-Ek}{(e-a)(k-a)},$$

valeurs qui ne diffèrent qu'en ce que l'une a au dénominateur le

Digitized by Google

facteur $k - e$, et l'autre a le facteur $e - a$, et qui sont par conséquent de même signe, tant que e est intermédiaire entre k et a; ce qui prouve que

$$\frac{K - A}{k - a}$$

l'est entre

$$\frac{K - E}{k - e} \text{ et } \frac{E - A}{e - a}.$$

Si l'on avait

$$aE - Ae + Ak - aK + eK - Ek = 0,$$

ces trois fractions seraient égales; mais cela ne changerait rien à la démonstration dont nous nous occupons ici; il faudrait seulement entendre par *quantité plus grande*, une quantité qui ne peut être qu'égale ou plus grande, et donner la même extension à cette expression, *quantité plus petite.* C'est ce que nous ferons toujours dans ce Mémoire.

g étant intermédiaire entre k et e, et c entre e et a, les deux fractions

$$\frac{K - E}{k - e} \text{ et } \frac{E - A}{e - a}$$

le seront respectivement entre

$$\frac{K - G}{k - g} \text{ et } \frac{G - E}{g - e}, \text{ et entre } \frac{E - C}{e - c} \text{ et } \frac{C - A}{c - a}.$$

Parmi ces quatre dernières fractions, il y en aura donc nécessairement une plus grande que la plus grande de ces deux-ci,

$$\frac{K - E}{k - e} \text{ et } \frac{E - A}{e - a},$$

et par conséquent plus grande que

$$\frac{K - A}{k - a},$$

et il y en aura pour la même raison une plus petite que cette dernière quantité.

On démontrera de même que parmi les huit fractions

$$\frac{K-H}{k-h}, \frac{H-G}{h-g}, \frac{G-F}{g-f}, \frac{F-E}{f-e}, \frac{E-D}{e-d}, \frac{D-C}{d-c}, \frac{C-B}{c-b}, \frac{B-A}{b-a},$$

il

Digitized by Google

il y en a nécessairement une plus grande et une plus petite que

$$\frac{K - A}{k - a}.$$

En continuant de la même manière à intercaler des valeurs de x entre les précédentes, on formera de nouvelles suites de fractions, parmi lesquelles il y en aura toujours une plus grande et une plus petite que

$$\frac{K - A}{k - a}.$$

Si l'on suppose dans ces opérations successives toutes les valeurs de x équidifférentes entre elles, les dénominateurs des fractions d'une même suite seront égaux et de moitié plus petits que ceux de la suite précédente; d'où il suit qu'on pourra les rendre aussi petits que l'on voudra. Après les avoir amenés à être moindres que la plus petite des valeurs de i qu'on supposerait rendre

$$\frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$

plus grande ou plus petite que la valeur finie

$$\frac{K - A}{k - a},$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre k et a, il est évident que les diverses fractions de la suite où l'on serait parvenu, seraient autant de valeurs de

$$\frac{f(x + i) - f(x)}{i},$$

correspondantes à cet i, et à des valeurs de x entre k et a; or i étant constant dans une même suite, en faisant varier x dans la fonction que nous considérons depuis $x = k$ jusqu'à $x = a$, on passerait, d'après ce que nous venons de voir, par une valeur plus grande et plus petite que

$$\frac{K - A}{k - a},$$

et par conséquent par une valeur égale à cette fraction, en vertu du

Digitized by Google

raisonnement (*) dont M. *Lagrange* s'est servi pour démontrer la réalité des racines irrationnelles des équations algébriques, où l'on trouve des changemens de signes dans les résultats que l'on obtient en substituant différens nombres à x. Cette conséquence étant contradictoire à la supposition d'où nous étions partis, que la valeur de i avait été prise assez petite pour que toutes celles que prend

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

depuis $x = k$ jusqu'à $x = a$, fussent moindres ou plus grandes que

$$\frac{K-A}{k-a},$$

prouve que cette supposition était fausse, et qu'aucune valeur de i, quelque petite qu'elle soit, ne peut satisfaire à cette condition; d'où il suit qu'il est impossible que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

augmente ou diminue indéfiniment, lorsqu'on rend i de plus en plus petit pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle que nous considérons; il faut donc, d'après ce qu'on a vu au commencement de ce mémoire, que cette fonction de x et de i se réduise, quand $i = 0$, à une fonction de x.

Puisque la fonction

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

devient égale à $f'x$ quand $i = 0$, on pourra la représenter en général par

$$f'(x) + I,$$

(*) Ce raisonnement ne pourrait être appliqué au cas présent, si

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

devenait infini dans l'intervalle de k à a; mais la valeur de i étant ici déterminée, quoique très-petite, cela ne saurait avoir lieu sans qu'une valeur de $f(x)$ fût infinie dans le même intervalle, ce qui est contraire aux suppositions d'où nous sommes partis, relativement aux valeurs k et a de x.

Digitized by Google

I étant une fonction de x et de i qui s'évanouit avec i, et qui pourra par conséquent devenir aussi petite qu'on voudra, en rendant i aussi petit qu'il le faudra pour cela; mais, d'après la démonstration précédente,

$$f'(x) + I,$$

prend nécessairement pour des valeurs de x comprises entre $x = k$ et $x = a$, une valeur plus grande (*) et une plus petite que

$$\frac{K - A}{k - a},$$

$f'(x)$ aura donc la même propriété; car si toutes les valeurs de $f'(x)$ dans cet intervalle, étaient, par exemple, plus petites que

$$\frac{K - A}{k - a},$$

il n'y aurait qu'à prendre i tel que toutes les valeurs de I dans le même intervalle fussent plus petites que la plus petite différence de celles de $f'(x)$ à

$$\frac{K - A}{k - a},$$

et alors toutes les valeurs de

$$f'(x) + I \text{ ou de } \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$

seraient plus petites que

$$\frac{K - A}{k - a},$$

ce qui est contraire à la démonstration précédente. On démontrera de même qu'il est impossible que toutes les valeurs de $f'(x)$ soient plus grandes que

$$\frac{K - A}{k - a}.$$

Non-seulement cette propriété a toujours lieu à l'égard de $f'(x)$; mais elle ne peut appartenir qu'à cette seule fonction de x. C'est ce qu'on prouve aisément en observant qu'étant démontrée pour la fonction

(*) Il faut bien se rappeler ici ce que j'ai dit plus haut sur le sens que je donnerai toujours dans ce mémoire à ces expressions, *d'une valeur plus grande et d'une valeur plus petite.*

Digitized by Google

$f'(x)$, si elle pouvait appartenir à une autre fonction, celle-ci pourrait toujours être représentée par

$$f'(x) \pm \varphi(x),$$

et qu'alors il suffirait de prendre x et $x + i$ assez peu différens pour que la différence de la plus grande et de la plus petite valeur de $f'(x)$, dans cet intervalle, fût moindre que la plus petite des valeurs que $\varphi(x)$ prend dans le même intervalle; car alors toutes les valeurs de

$$f'(x) - \varphi(x)$$

seraient nécessairement moindres que la plus petite valeur de $f'(x)$, et à plus forte raison moindres que

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i};$$

et toutes les valeurs de

$$f'(x) + \varphi(x)$$

seraient, par la même raison, plus grandes que la même quantité; en sorte que ni

$$f'(x) - \varphi(x),$$

ni

$$f'(x) + \varphi(x),$$

ne pourraient avoir la propriété dont il est question.

On peut tirer de là une définition de la fonction dérivée $f'(x)$ qui me paraît la plus générale et la plus rigoureuse possible, et qui conduit immédiatement aux applications géométriques et mécaniques de la théorie des fonctions dérivées.

La fonction dérivée de $f(x)$ est une fonction de x telle, que $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ est toujours comprise entre deux des valeurs que cette fonction dérivée prend depuis x jusqu'à $x + i$, quels que soient d'ailleurs x et i.

Il suffit donc de prouver qu'une fonction jouit de cette propriété pour qu'il soit démontré qu'elle est égale à $f'(x)$, et c'est peut-être de cette considération qu'il faudrait partir pour donner le plus de

Digitized by Google

rigueur et d'uniformité aux applications géométriques et mécaniques de la théorie des fonctions dérivées.

Si l'on veut démontrer, par exemple, que

$$f(x) = \text{sin. } x,$$

donne

$$f'(x) = \text{cos. } x,$$

ce qui suffit pour établir toutes les règles de la différenciation des fonctions circulaires, en combinant cette équation avec les procédés usités pour la différenciation des fonctions algébriques, on observera que la plus grande valeur de cos. x, depuis x jusqu'à $x + i$, étant cos. x, et la plus petite cos. $(x + i)$, il faudra prouver que

$$\text{cos. } x > \frac{\text{sin. } (x + i) - \text{sin. } x}{i},$$

et que

$$\text{cos. } (x + i) < \frac{\text{sin. } (x+i) - \text{sin. } x}{i}.$$

On n'aura, pour cela, qu'à écrire d'abord

$$\frac{\text{sin. } (x + i) - \text{sin. } x}{i},$$

sous cette forme

$$\text{cos. } x \frac{\text{sin. } i}{i} - \text{sin. } x \frac{1 - \text{cos. } i}{i},$$

et on verra que cette quantité est surpassée par cos. x, puisqu'on a toujours $\frac{\text{sin. } i}{i}$ plus petit que 1, et $1 -$ cos. i positif.

On observera ensuite qu'en faisant $x + i = z$, la même quantité devient

$$\frac{\text{sin. } z - \text{sin. } (z - i)}{i},$$

qui peut s'écrire ainsi,

$$\frac{\text{sin. } z\,(1 - \text{cos. } i) + \text{cos. } z \text{ sin. } i}{i},$$

ou

$$\frac{\frac{\text{sin. } z}{\text{tang. } i}(\text{tang. } i - \text{sin. } i) + \text{cos. } z \text{ sin. } i}{i}.$$

Digitized by Google

Mais en se bornant, comme nous le faisons ici, aux valeurs de x et de z comprises dans le premier quart de cercle, on a

$$\frac{\text{sin. } z}{\text{tang. } i} > \frac{\text{sin. } z}{\text{tang. } z}, \text{ c'est-à-dire} > \text{cos. } z,$$

parce que z surpasse i de toute la quantité x; la valeur précédente est donc plus grande que

$$\frac{\text{cos. } z\,(\text{tang. } i - \text{sin. } i) + \text{cos. } z \text{ sin. } i}{i} = \text{cos. } z\,\frac{\text{tang. } i}{i},$$

et à plus forte raison plus grande que cos. z.

Supposons maintenant que $f(x)$ représente l'aire d'une courbe; $f(x+i) - f(x)$ sera un trapèze curviligne plus grand que le rectangle dont la base serait i, et qui aurait pour hauteur la plus petite ordonnée dans l'intervalle de x à $x+i$, et plus petite que le rectangle formé de la même manière avec la plus grande ordonnée du même intervalle; ainsi on aura, en divisant par i, la plus grande ordonnée plus grande que

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

et la plus petite moindre que la même quantité; d'où l'on conclura

$$y = f'(x),$$

ce qui donne la formule ordinaire des quadratures.

Si l'on avait pris au contraire

$$y = f(x),$$
$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

aurait représenté la tangente trigonométrique de l'angle que forme avec l'axe des abcisses la corde qui joint les deux points dont les abscisses sont x et $x+i$; et comme parmi les tangentes de l'arc soutendu par cette corde, il y en a nécessairement de plus inclinées que cette corde, et d'autres qui le sont moins; la fonction de x qui exprime la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente fait avec l'axe, aura

Digitized by Google

pour des valeurs de x entre x et $x + i$, une valeur plus grande et une plus petite que

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

et sera par conséquent $= f'(x)$; d'où l'on déduit toutes les formules connues des sous-tangentes, tangentes, normales, &c.

Si $F(x)$ représente un arc de la même courbe, compté depuis un point fixe,

$$F(x + i) - F(x)$$

sera la valeur de l'arc dont nous venons de parler, et en supposant toutes ses tangentes terminées aux ordonnées extrêmes qui répondent à x et à $x + i$, il est évident que la plus inclinée de ces tangentes sera plus grande que l'arc qui n'a la même inclinaison relativement à l'axe qu'au point de contact, et qui est moins incliné à tous ses autres points, tandis que la tangente qui l'est le moins, est, par une raison semblable, plus courte que le même arc. Mais en regardant x comme l'abscisse du point de contact d'une de ces tangentes, cette valeur de x étant intermédiaire entre $x + i$, les portions de tangentes dont nous venons de parler, seront représentées en général par

$$i\sqrt{(1 + f(x)^2)};$$

ainsi donc en divisant par i, la plus grande valeur de $\sqrt{(1 + f'(x)^2)}$, surpassera

$$\frac{F(x+i) - F(x)}{i},$$

et la plus petite sera moindre; d'où l'on conclura

$$F'(x) = \sqrt{(1 + f'(x)^2},$$

formule des rectifications.

Si le raisonnement que nous venons de faire sur ce que les portions de lignes droites ou courbes, interceptées entre deux ordonnées, sont d'autant plus longues qu'elles sont plus inclinées, ne semblait pas assez rigoureux, on pourrait faire usage de ceux qu'on trouve dans la

Digitized by Google

Théorie des fonctions analytiques, pour prouver qu'une de ces portions de tangentes est plus petite, et l'autre plus grande que l'arc; mais nous avons préféré de présenter la chose comme nous venons de le faire, pour pouvoir étendre le même raisonnement à un cas qu'il est très-difficile de démontrer rigoureusement. Je veux parler de l'aire des surfaces courbes données par une équation entre trois variables; car, quand toutes les courbes tracées sur cette surface, par un même point, ne tournent pas à ce même point leur convexité du même côté, il est très-difficile et très-long de démontrer en toute rigueur entre quelles limites tombe la portion de la surface qui se trouve interceptée par les quatre faces du prisme dont la base est $\Delta x \Delta y$, tandis qu'il suffit, en suivant une marche analogue à celle que nous avons adoptée ici, d'observer que cette portion de surface est moindre que le plus incliné de tous les plans qui lui sont tangens, et qui se terminent à la même surface prismatique, tandis qu'elle l'emporte nécessairement sur le moins incliné de ces plans. On ne peut au reste s'occuper de cette recherche que lorsqu'on a étendu aux fonctions de deux variables, ce que nous disons ici des fonctions d'une seule, et c'est ce qui m'a déterminé à en faire le sujet d'une note qu'on trouvera à la fin de ce mémoire.

Passons aux applications relatives à la mécanique. L'espace parcouru, la vîtesse et la force accélératrice d'un point mobile étant évidemment fonctions du temps, si l'on représente en général l'espace par $f(t)$, on aura pour l'espace parcouru, dans un temps représenté par i,

$$f(t+i) - f(t).$$

Or si le point mobile s'était mu pendant ce temps i, avec la plus grande des différentes vîtesses qu'il a dans cet intervalle, il aurait décrit un espace plus grand que

$$f(t+i) - f(t),$$

tandis qu'il aurait décrit un espace plus petit en se mouvant pendant le même temps avec la plus petite des différentes vîtesses qu'il a dans le même intervalle. Mais lorsqu'on suppose qu'il se meut ainsi avec des

Digitized by Google

des vîtesses constantes pendant le temps i, les espaces parcourus sont égaux à ces vîtesses multipliées par i; d'où l'on conclut que la plus grande vîtesse qui ait lieu dans cet intervalle de temps, est nécessairement plus grande que

$$\frac{f(t+i)-f(t)}{i},$$

et la plus petite, moindre que la même quantité; d'où il résulte que la vîtesse est toujours égale à $f'(t)$, quand l'espace l'est à $f(t)$.

Si nous représentons à son tour cette vîtesse par $f(t)$, nous aurons

$$f(t+i)-f(t),$$

pour le changement produit dans la vîtesse par la force accélératrice supposée variable pendant le temps i. Ce changement doit être moindre que celui que produirait, pendant le même temps, la force accélératrice si elle agissait uniformément avec la plus grande valeur qu'elle ait dans cet intervalle, et ce changement doit être plus grand que celui qu'elle produirait si elle agissait pendant le même intervalle avec sa plus petite valeur; d'où il est aisé de conclure que la première de ces valeurs est nécessairement plus grande que

$$\frac{f(t+i)-f(t)}{i},$$

et la seconde plus petite que la même quantité; ce qui donne $f'(t)$ pour l'expression de la force accélératrice quand la vîtesse est représentée par $f(t)$.

On voit assez, par ce que nous venons de dire, qu'en trouvant des règles générales pour passer des fonctions primitives à leurs dérivées, et revenir de celles-ci aux premières, on a en quelque sorte résolu d'avance tous les problèmes de la géométrie et de la mécanique. On sait que ces règles sont l'objet du calcul différentiel et du calcul intégral : il serait superflu d'en parler ici; mais j'ai cru cependant devoir dire un mot de la manière de déduire, des considérations exposées précédemment, le procédé général de la différenciation, et de le démontrer ainsi en toute rigueur.

Nous avons vu que $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$,

Digitized by Google

est égal à $f'(x)$, plus une fonction I de x et de i qui s'évanouit quand $i = 0$; on a donc

$$f(x + i) = fx + if'(x) + iI.$$

Si l'on substitue dans une équation quelconque qui doive avoir lieu entre x et $f(x)$ pour toutes les valeurs de x, cette valeur à la place de $f(x)$, et $x + i$ à la place de x, l'équation ainsi obtenue devra être satisfaite, quelle que soit la valeur de i; et comme elle contiendra tous les termes qui se trouvaient dans la proposée, on les fera disparaître en en retranchant celle-ci; l'équation restante ayant tous ses termes divisibles par i, on fera cette division, et il viendra une nouvelle équation composée en partie de termes indépendans de i, et en partie de termes qui s'évanouiront avec i, parmi lesquels se trouveront tous ceux qui contiennent I; cette équation devant avoir lieu quel que soit i, il faudra que ces deux sortes de termes se détruisent séparément, ce qui donnera deux équations dont la première déterminera $f'(x)$, et la seconde I. Si l'on ne veut que $f'(x)$, on pourra se contenter de substituer $f(x) + if'(x)$, au lieu de $f(x) + if'(x) + iI$, puisqu'aucun des termes où entre I ne doivent se trouver dans l'équation dont on a besoin. Mais après avoir fait le calcul de cette manière, il faudra effacer tous les termes où i resterait, parce que ces termes ne font point partie de l'équation qui doit donner $f'(x)$, mais de celle qui donnerait I, et qu'ils se trouveraient, en vertu de cette dernière, détruits par les termes en I, qu'on aurait obtenus si l'on avait substitué à la place de $f(x + i)$, sa véritable valeur $f(x) + if'(x) + iI$.

Ce procédé est évidemment celui du calcul différentiel, où l'on représente par dx ce que nous nommons ici i, et par dy, le terme $if'(x)$, y étant la fonction de x que nous avons exprimée par $f(x)$. Ce calcul pourrait donc être dégagé de cette manière, non-seulement de la considération des infiniment petits, mais encore de celle de la formule de *Taylor*, dont il fournirait ensuite une démonstration très-simple, qui est précisément celle qui va nous conduire à l'expression finie des

Digitized by Google

termes qu'on néglige dans cette formule, lorsqu'on arrête la série à un terme quelconque.

$f'(x) + I$ étant une fonction de x et de i, si l'on fait $x + i = z$, et qu'on y substitue à la place de i sa valeur $z - x$, elle se changera en une fonction de x et de z, que nous désignerons par p, et nous aurons

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = p,$$

ou

$$f(z) = f(x) + p(z - x).$$

Cette équation devant être identique quelles que soient les valeurs de x et de z, on pourra supposer que zy restant invariable, x devienne $x + h$, $f(x)$ deviendra $fx + hf'(x) + Hh$, $z - x$ se changera en $z - x - h$, et p deviendra $p + hp'' + Ph$, puisque z étant constant, p est une simple fonction de x. J'ai écrit p'' et non pas seulement p', d'après la notation de M. *Lagrange*, pour marquer que x seul varie dans p (*).

Comme H et P doivent s'évanouir avec h, l'équation résultante de la substitution de ces valeurs dans

$$f(z) = f(x) + p(z - x),$$

se décomposera comme nous l'avons dit tout-à-l'heure, et l'équation indépendante de h, sera

$$f'(x) + p''(z - x) - p = 0.$$

Cette équation devant encore être identique quelle que soit la valeur de x, on pourra y substituer de nouveaux $x + h$ à x, et comme on trouvera un terme en p'' qui viendra de ce que dans $p''(z - x)$; $z - x$ se change en $z - x - h$, et un autre de ce que le terme $-p$ devient

$$-p - p''h - Ph,$$

on aura

$$f''(x) + p''(z - x) - 2p'' = 0.$$

(*) *Voyez* le douzième cahier du Journal de l'École polytechnique, *page 265*.

Digitized by Google

En continuant de la même manière, on trouve successivement

$$f'''(x) + p'''(z - x) - 3p'' = 0,$$
$$f'''(x) + p'''(z - x) - 4p''' = 0, \text{ &c.}$$

où il est bien aisé de voir pourquoi les coëfficiens des derniers termes augmentent d'une unité à chaque opération, ce qui est la clef de la démonstration. On tire de cette suite d'équations, les valeurs de p, p', p'', &c., ainsi qu'il suit :

$$p = f'(x) + p'(z - x),$$
$$p' = \frac{f''(x)}{2} + \frac{p''}{2}(z - x),$$
$$p'' = \frac{f''(x)}{3} + \frac{p''(z-x)}{3}, \text{ &c.}$$

Ces valeurs étant substituées l'une après l'autre dans $f(x) + p(z-x)$, on a

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + p'(z-x)^2,$$
$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \frac{f''(x)}{2}(z-x)^2 + \frac{p''}{2}(z-x)^3,$$
$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \frac{f''(x)(z-x)^2}{2} + \frac{f'''(x)}{2.3}(z-x)^3 + \frac{p'''}{2.3}(z-x)^4,$$
&c.

La loi de ces séries et la marche du calcul qui conduit à cette loi, sont également faciles à saisir ; il est évident qu'en y écrivant i à la place de $z - x$, on aura la valeur de $f(x + i)$ développée en autant de termes qu'on voudra, ordonnés suivant les puissances de i, d'où résulte précisément la formule de *Taylor*.

Le principal avantage qu'on trouve à développer $f(x + i)$, comme nous venons de le faire, consiste à avoir l'expression exacte du reste de la série, lorsqu'on l'arrête à un terme quelconque ; on voit par le calcul précédent, que si ce terme est représenté par $\frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3...n} i^n$, le reste de la série le sera par $\frac{p^{(n)}}{1.2.3...n} i^{n+1}$.

Digitized by Google

M. *Lagrange* a donné le premier une méthode pour trouver la valeur de ce reste; cette méthode conduit aux mêmes résultats que la formule précédente : mais comme elle est fondée sur des considérations différentes, et qu'elle oblige de remonter d'une fonction donnée à sa primitive, au lieu de descendre simplement de la primitive p, à ses dérivées par rapport à x, p', p'', p''', &c., j'ai cru que l'application comparée de ces deux méthodes à un même exemple, pourrait être de quelque intérêt.

Soit

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x} = x - a^2 x^{-1},$$

on aura

$$f'(x) = 1 + a^2 x^{-2},$$
$$f''(x) = -2 a^2 x^{-3},$$
&c.

En bornant le développement à ce terme, on aura, d'après la formule exposée dans ce mémoire,

$$f(x+i) = f(z) = \frac{x^2 - a^2}{x} + \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) i - \frac{a^2}{x^3} i^2 + \frac{p''}{2} i^2;$$

mais

$$p = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{z - x - \frac{a^2}{z} + \frac{a^2}{x}}{z - x} = 1 + \frac{a^2}{zx},$$

ce qui donne

$$p' = -\frac{a^2}{zx^2} \text{ et } p'' = \frac{2a^2}{zx^3} = \frac{2a^2}{(x+i)x^3};$$

on a donc

$$f(x+i) = \frac{x^2 - a^2}{x} + \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) i - \frac{a^2}{x^3} i^2 + \frac{a^2}{(x+i)x^3} i^3.$$

En exécutant les opérations indiquées, et réduisant tout au même dénominateur, le second membre de cette équation se réduit, comme cela doit être, à $x + i - \frac{a^2}{x+i}$.

Digitized by Google

Pour trouver, par la méthode de M. *Lagrange*, que le reste de la série est en effet égal à $\frac{a^2 i^3}{(x+i)x^3}$, il faut faire $u = \frac{i}{z}$, ce qui donne $x = z - i = z - uz$; puis supposer $f(x+i) = f(z) = f(z-uz) + uzf'(z-uz) + \frac{u^2z^2}{2}f''(z-uz) + z^3T$; en prenant les fonctions dérivées dans la supposition que z reste le même, et que u seul varie, on a

$$0 = -zf'(z-uz) + zf'(z-uz) - uz^2f''(z-uz) + uz^2f''(z-uz) - \frac{u^2z^3}{2}f'''(z-uz) + z^3T',$$

T' étant la dérivée de T par rapport à u; effaçant ce qui se réduit, et divisant par z^3, il vient

$$T' = \frac{u^2}{2}f'''(z-uz) = 3a^2\frac{u^2}{(u-z)^4},$$

parce que $f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2}{x^4}$;

Pour trouver la fonction primitive T de T', j'écris

$$T' = \frac{a^2}{z}\left[\frac{3u^2z}{z-uz}(z-uz)^{-3}\right] = \frac{a^2}{z}\left[3u^2(z-uz)^{-3} + 3u^3z(z-uz)^{-4}\right]$$

dérivée exacte par rapport à u, qui donne

$$T = \frac{a^2}{z}u^3(z-uz)^{-3} = \frac{a^2u^3}{z(z-uz)^3};$$

où il ne faut point ajouter de constante, parce qu'elle s'évanouit en même temps que u; et le reste de la série

$$z^3T = \frac{a^2u^3z^3}{z(z-uz)^3} = \frac{a^2i^3}{(x+i)x^3};$$

précisément comme par l'autre méthode.

Soit encore la fonction radicale $\sqrt{(x)}$, en faisant attention que $p = \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}$, est divisible en haut et en bas par $\sqrt{z} - \sqrt{x}$, on aura $p = \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$, dont les dérivées, par rapport à x,

Digitized by Google

donneront sur-le-champ les valeurs des restes : ces dérivées sont

$$p = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}},$$

$$p'_1 = \frac{-1}{2[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^2 \sqrt{(x)}},$$

$$p''_1 = \frac{1}{4[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^2 x \sqrt{(x)}} + \frac{1}{2[\sqrt{(z+\sqrt{x})}]^3 x} = \frac{\sqrt{z} + 3\sqrt{x}}{4[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^3 x \sqrt{(x)}}, \text{ &c.,}$$

d'où l'on tire les valeurs des restes correspondans, d'après les expressions données plus haut, ainsi qu'il suit :

$$p(z - x) = \frac{z - x}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}},$$

$$p'_1(z - x)^2 = \frac{-(z-x)^2}{2[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^2 \sqrt{(x)}} = -\frac{i^2}{2[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2},$$

$$\frac{p''_1}{2}(z - x)^3 = \frac{(z-x)^3[\sqrt{z} + 3\sqrt{x}]}{8[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^3 x \sqrt{(x)}} = \frac{i^3[\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}]}{8[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3 x \sqrt{(x)}},$$

&c.

Ce sont, en effet, les valeurs des restes qu'on trouve à la *page 10* de la Théorie des fonctions analytiques, où elles sont calculées par l'algèbre ordinaire.

Lorsque l'on ne peut pas mettre la valeur de p sous une forme qui ne se réduise pas à $\frac{0}{0}$ quand $i = 0$, la formule précédente, et celle des intégrales définies s'accordent à ne donner qu'un résultat identique, et par conséquent inutile ; on trouve par les deux méthodes le reste de la série égal à la fonction même $f(x + i)$ moins tous les termes déjà employés.

Reprenons l'équation identique

$$f(z) = f(x) + p(z - x),$$

et supposons que ce soit z et non x qui varie d'une quantité indéterminée k ; les fonctions dérivées de p seront alors représentées par p'_1, p''_1, p'''_1, &c., et en ne prenant chaque fois que les termes qui

Digitized by Google

multiplient la première puissance de k. on aura successivement

$$f'(z) = p'(z - x) + p,$$
$$f''(z) = p''(z - x) + 2p',$$
$$f'''(z) = p'''(z - x) + 3p'',$$
&c. &c.

donc

$$p = f'(z) - p'(z - x),$$
$$p' = \frac{f''(z)}{2} - \frac{p''}{2}(z - x),$$
$$p'' = \frac{f'''(z)}{3} - \frac{p'''}{3}(z - x),$$
&c. &c.

Substituant successivement dans

$$f(z) = f(x) + p(z - x),$$

il vient

$$f(z) = f(x) + f'(z)(z-x) - p'(z - x)^2,$$
$$f(z) = f(x) + f'(z)(z-x) - \frac{f''(z)}{2}(z-x)^2 + \frac{p'''}{2}(z-x)^3,$$
$$f(z) = f(x) + f'(z)(z-x) - \frac{f''(z)}{2}(z-x)^2 + \frac{f'''(z)}{2.3}(z-x)^3 - \frac{p'''}{2.3}(z-x)^4,$$
&c. &c.

ce qui donne évidemment la formule

$$f(z) = f(z - i) + if'(z) - \frac{i^2}{2} f(z) + \frac{i^3}{2.3} f'''(z) - \text{&c.}$$

qui sert pour remonter des dérivées aux primitives, comme la précédente pour descendre des primitives aux dérivées; quand $z = i$, elle devient

$$f(z) = c + zf'(z) - \frac{z^2}{2} f''(z) + \frac{z^3}{2.3} f'''(z) - \text{&c.}$$

qu'on aurait également tirée de la première formule, comme on le fait ordinairement, en supposant $i = x$, et transposant.

Mais en l'obtenant par la méthode précédente, on a l'avantage de déterminer

Digitized by Google

déterminer dans cette formule, comme dans celle dont nous nous sommes d'abord occupés, la valeur du reste de la série, lorsqu'on l'arrête à un terme quelconque, valeur qui se trouve dépendre, dans la dernière série, des dérivées de p par rapport à z, tandis qu'elle dépendait, dans la première, des dérivées de la même fonction par rapport à x.

Il est bon d'observer que dans les valeurs des restes des séries, p ne sert qu'à représenter d'une manière abrégée $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, en sorte qu'au lieu de p', p'', &c., on doit écrire

$$\left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right)', \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right)'', \text{ \&c.}$$

et de même

$$\left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right)_1', \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right)_1'', \text{ \&c.}$$

à la place de p', p'', &c.

La valeur du reste de la série de *Taylor* que nous venons de trouver, dans le cas où on l'arrête à un terme quelconque, contient la fonction donnée, et cela ne saurait être autrement, puisque si cette fonction était transcendante, et qu'elle n'entrât pas dans la valeur du reste, on aurait une expression algébrique finie d'une quantité transcendante; ce qui est absurde. Mais il arrive souvent que la fonction qu'on développe est inconnue, et que ses dérivées seules sont connues; alors on ne peut faire usage de la valeur exacte du reste de la série, et il est important de déterminer les limites entre lesquelles est renfermée cette valeur.

M. *Lagrange*, dans la Théorie des fonctions analytiques, a déduit ces limites de la valeur en intégrale définie qu'il avait donnée pour exprimer le reste de la série; elles se déduisent également avec la plus grande facilité de la valeur que nous venons de trouver pour ce reste.

Nous avons vu, au commencement de ce mémoire, que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

était toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur

Digitized by Google

de $f'(x)$, depuis $x = x$ jusqu'à $x = z$: si nous nommons ces valeurs R et S, nous en conclurons que

$$f(z) - f(x),$$

qui est la fonction primitive de $f'(x)$ prise depuis $x = x$ jusqu'à $x = z$, tombe nécessairement entre $R(z - x)$ et $S(z - x)$.

Si $f'(x)$ est toujours de même signe dans cet intervalle, R, S, et par conséquent

$$f(z) - f(x)$$

seront aussi de ce signe, parce que nous supposons ici $z > x$; cette proposition s'appliquant à toute sorte de fonctions, puisqu'il n'en est aucune qui ne puisse être représentée par $f(x)$, il sera facile d'en conclure les limites entre lesquelles se trouve la valeur

$$\frac{p^{(n)}}{2.3.4\ldots n}(z - x)^{n+1}$$

du reste de la série, lorsqu'on en néglige les termes à partir du terme

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{2.3\ldots(n+1)}(z - x)^{n+1}.$$

Pour cela, on se rappellera que la loi que nous avons reconnue dans la formation des dérivées, par rapport à x, de

$$f(z) = f(x) + p(z - x),$$

se continuant indéfiniment, ces dérivées peuvent être toutes représentées par

$$f^{(n+1)}(x) + p^{(n+1)}(z - x) - (n + 1)p^{(n)} = 0;$$

multipliant cette équation par $(z - x)^n$, il viendra

$$(z - x)^n f^{(n+1)}(x) + p^{(n+1)}(z - x)^{n+1} - (n + 1)p^{(n)}(z - x)^n = 0,$$

qui peut s'écrire ainsi,

$$[p^{(n)}(z - x)^{(n+1)}]' + (z - x)^n f^{n+1}(x) = 0.$$

Cette quantité étant nulle si l'on prend la plus grande et la plus petite valeur dont $f^{(n+1)}(x)$ soit susceptible depuis $x = x$ jusqu'à $x = z$, qu'on les représente par M et par N, et qu'on les substitue à la place de $f^{(n+1)}(x)$, dans l'équation précédente, son premier membre

Digitized by Google

deviendra plus grand que zéro, par une de ces substitutions, et plus petit par l'autre, en sorte que les deux quantités

$$[p^{(n,)}(z - x)^{n+1}]' + M(z - x)^n,$$

et

$$[p^{(n,)}(z - x)^{n+1}]' + N(z - x)^n,$$

seront nécessairement de signes contraires. Il en sera de même, d'après ce que nous venons de dire, de leurs fonctions primitives prises par rapport à x, depuis $x = x$ jusqu'à $x = z$, c'est-à-dire que les deux quantités

$$p^{(n,)}(z - x)^{n+1} - \frac{M(z-x)^{n+1}}{n+1},$$

et

$$p^{(n,)}(z - x)^{n+1} - \frac{N(z-x)^{n+1}}{n+1} (*),$$

sont de signes contraires en les divisant par $2.3.4...n$; on en conclura que la valeur $\frac{p^{(n,)}}{2.3.4...n}(z - x)^{n+1}$, du reste de la série de *Taylor*, est comprise entre $\frac{M(z-x)^{n+1}}{2.3.4...(n+1)}$ et $\frac{N(z-x)^{n+1}}{2.3.4...(n+1)}$. Ces limites sont précisément celles qu'a données M. *Lagrange*, et ce sont, comme on voit, la plus grande et la plus petite valeur dont soit susceptible, depuis $x = x$ jusqu'à $x = z$, le premier des termes négligés $\frac{f^{(n+1)}(x)}{2.3.4...(n+1)}(z - x)^{n+1}$.

On trouverait, par un procédé absolument semblable, que le reste $\frac{p^{(,n)}}{2.3.4...n}(z - x)^{n+1}$, de la série que nous avons trouvée pour exprimer $f(z)$ en fonction de ses dérivées $f'(z)$, $f''(z)$, est de même compris entre les limites

$$\frac{M(z-x)^{n+1}}{2.3.4...(n+1)} \text{ et } \frac{N(z-x)^{n+1}}{2.3.4...(n+1)}.$$

En nommant M et N la plus grande et la plus petite valeur dont

(*) Il ne faut point ajouter de constantes à ces fonctions primitives, parce qu'elles s'évanouissent, comme cela doit être, quand $x = z$.

Digitized by Google

$f^{(n+1)}(z)$ est susceptible depuis $z = x$ jusqu'à $z = z$; les limites de l'erreur qu'on commet en négligeant dans les deux séries le reste à partir d'un terme qui y occupe le même rang, sont donc précisément les mêmes. Non seulement $p^{(n,)}$ et $p^{(,n)}$ sont compris entre les limites $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$; mais si l'on prend les fonctions dérivées de p en faisant varier à-la-fois x et z d'une même quantité h, ce qui donnera des expressions de cette forme,

$$p'_{,} + p'_{,},$$
$$p''_{,} + 2p'_{,'} + p''_{,},$$
$$p'''_{,} + 3p''_{,'} + 3p'_{,''} + p'''_{,},$$

et en général

$$p^{(n,)} + np^{(n-1,1)} + n \cdot \frac{n-1}{2} p^{(n-2,2)} + \ldots + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-m+1}{m} p^{(n-m,m)} + \&c.$$

Chaque terme des valeurs de ces dérivées complètes sera compris entre les mêmes limites $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que si l'un de ces termes est entre deux limites, le suivant se trouvera aussi compris entre les mêmes limites; car ayant déjà démontré que $p^{(n,)}$ est entre $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$, il s'en suivra que d'abord $p^{(n-1,1)}$, et qu'ensuite $p^{(n-2,2)}$, $p^{(n-3,3)}$, &c. seront compris entre les mêmes limites. Soit donc en général G et H, les deux limites du terme $n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-m+2}{m-1} p^{(n-m+1,m-1)}$ qui précède immédiatement $n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-m+1}{m} p^{(n-m,m)}$, il s'agira de prouver que ce sont aussi les limites de ce dernier. En faisant, pour abréger, $n - m + 1 = k$, et $n \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-m+1}{m-1} = R$, ces deux termes deviendront

$$Rp^{(k,m-1)}, \text{ et } \frac{Rk}{m} p^{(k-1,m)},$$

Digitized by Google

en sorte qu'il faudra démontrer que si $Rp^{(k,m-1)}$ est intermédiaire entre deux limites quelconques G et H, $\frac{Rk}{m}\,p^{(k-1,m)}$ se trouvera aussi compris entre les mêmes limites ; pour cela on prendra d'abord les dérivées de l'équation

$$f(z) = f(x) + p(z - x),$$

relativement à x, considérée comme seule variable, autant de fois qu'il y a d'unités dans k, ce qui donnera, d'après les formules trouvées précédemment ;

$$0 = f^{(k)}(x) + p^{(k,)}(z - x) - kp^{(k-1,)}.$$

Prenant ensuite les dérivées de celle-ci par rapport à z, autant de fois qu'il y a d'unités dans m, on trouvera successivement

$$0 = p^{(k,1)}(z - x) + p^{(k,)} - kp^{(k-1,1)},$$
$$0 = p^{(k,2)}(z - x) + 2p^{(k,1)} - kp^{(k-1,2)},$$
$$0 = p^{(k,3)}(z - x) + 3p^{(k,2)} - kp^{(k-1,3)},$$

et enfin,

$$0 = p^{(k,m)}(z - x) + mp^{(k,m-1)} - kp^{(k-1,m)} \ldots [A]$$

car la loi de ces équations est facile à reconnaître, et il est évident, par le procédé même de la dérivation, qu'elle doit se continuer indéfiniment. On tire aisément de l'équation précédente

$$mp^{(k,m-1)}(z-x)^{k-1} = -p^{(k,m)}(z-x)^k + kp^{(k-1,m)}(z-x)^{k-1},$$

ou

$$mp^{(k,m-1)}(z-x)^{k-1} = -[p^{(k-1,m)}(z-x)^k]'.$$

Si donc G et H sont les deux limites de $Rp^{(k,m-1)}$ depuis $x = z$, jusqu'à $x = z - i$, et qu'on ait par conséquent dans cet intervalle $\frac{mG}{R} - mp^{(k,m-1)}$ et $\frac{mH}{R} - mp^{(k,m-1)}$, de signes contraires, on aura aussi, en multipliant ces deux quantités par $(z-x)^{k-1}$, et substituant $\frac{mG(z-x)^{(k-1)}}{R} + [p^{(k-1,m)}(z-x)^k]'$, et $miH(z-x)^{k-1} + [p^{(k-1,m)}(z-x)^k]'$, de signes contraires ; donc par le théorème déjà cité, il en sera de

Digitized by Google

même de leurs primitives par rapport à x seul, prises depuis $x = z$ jusqu'à $x = z - i$; mais ces primitives sont

$p^{(k-1,m)}(z-x)^k - \frac{mG(z-x)^k}{kR}$, et $p^{(k-1,m)}(z-x)^k - \frac{mH(z-x)^k}{kR}$,

donc

$$p^{(k-1,m)} - \frac{mG}{kR}, \text{ et } p^{(k-1,m)} - \frac{mH}{kR},$$

seront de signes contraires, et par conséquent $p^{(k-1,m)}$ sera intermédiaire entre $\frac{mG}{kR}$ et $\frac{mH}{kR}$, d'où il suit que le terme $\frac{Rk}{m}p^{(k-1,m)}$ de la dérivée complète de p, est toujours compris depuis $x = z$ jusqu'à $x = z - i$, entre les mêmes limites G et H que le terme précédent, et cette proposition étant démontrée généralement, il en résulte que tous ces termes sont compris entre les mêmes limites que le premier $p^{(n)}$ ou $p^{(m+k-1)}$, c'est-à-dire, entre $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$. On aurait pu faire, par rapport à z, le calcul que nous venons de faire par rapport à x, et on aurait de même prouvé que les limites de tous les termes sont les mêmes que celles du dernier $p^{(,n)}$, c'est-à-dire, encore $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$. Ce calcul, par rapport à z, serait même un peu plus simple en ce qu'on y éviterait le double changement de signe qui résulte dans le calcul par rapport à x, de ce que cette variable est précédée du signe — dans le facteur $z - x$.

Le terme général

$$n\,\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\cdots\frac{n-m+1}{m}\,p^{(n-m,m)},$$

étant toujours compris entre $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$, il s'ensuit que $p^{(n-m,m)}$ qui peut représenter une dérivée quelconque de p, a pour limites $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots1}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n}\cdot\frac{M}{n+1}$, et $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots1}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n}\cdot\frac{N}{n+1}$, ce qui donne une formule générale pour avoir les limites de toutes les dérivées, tant par rapport à x que par rapport à z, de la fonction $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, que nous avons représentée par p. Cette fonction

Digitized by Google

est d'autant plus remarquable, que c'est précisément celle qui, représentée par $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, ou $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, en faisant $f(x) = y$, joue dans le calcul des différences finies, le même rôle que $\frac{dy}{dx}$ dans le calcul différentiel.

Puisque les $n + 1$ termes de la dérivée complète de p, sont renfermées entre les limites $\frac{M}{n+1}$ et $\frac{N}{n+1}$, il est clair que la dérivée elle-même le sera entre ces deux limites multipliées respectivement par le nombre des termes, c'est-à-dire, entre M et N. On pourrait prouver directement ce dernier résultat; en effet, lorsque z et x varient à-la-fois de k, $z - x$ reste constant, d'où il suit que la dérivée de $p = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$, prise dans cette hypothèse, est $\frac{f'(x) - f'(z)}{z - x}$ qui doit être intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur M et N de $f^{(n+1)}(x)$, depuis x jusqu'à z, d'après le théorême général; car lorsqu'on suppose

$$M - f^{(n+1)}(x), \text{ et } N - f^{(n+1)}x$$

de signes contraires, il donne $Mx - f^{(n)}(x) + C$ et $Nx - f^{(n)}(x) + C'$, aussi de signes contraires; déterminant C et C', de manière que ces quantités s'évanouissent quand $x = z$, on a

$$C = -Mz + f^{(n)}(z), \quad C' = -Nz + f^{(n)}(z),$$

donc, en substituant et divisant par $z - x$,

$$\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(x)}{z - x} - M, \text{ et } \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(x)}{z - x} - N;$$

seront de signes contraires, et par conséquent la valeur $\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(x)}{z - x}$ de la dérivée complète de p tombe entre les limites M et N.

Puisque tous les termes de la dérivée complète de p sont compris entre la plus grande et la plus petite valeur d'une fonction de x, depuis x jusqu'à z, et qu'ainsi ces limites se confondent quand $z = x$, il est clair que cette supposition doit rendre tous ces termes égaux entre eux, et qu'ainsi ils ne peuvent différer les uns des autres que par

Digitized by Google

des quantités qui s'évanouissent quand $z = x$. Chacun de ces termes pourra donc être représenté par une série commençant par le premier d'entre eux $p^{(n,)}$, et dont tous les autres termes sont des puissances de $z - x$. Comme la forme de cette série, qui est toujours finie, est très-remarquable, j'ai cru devoir l'insérer ici. Pour l'obtenir on tire de l'équation $[A]$, trouvée ci-devant

$$p^{(k-1,m)} = \frac{m}{k}\, p^{(k,m-1)} + \frac{1}{k}\, p^{(k,m)}(z - x),$$

c'est-à-dire, en remettant à la place de k sa valeur $n - m + 1$,

$$p^{(n-m,m)} = \frac{m}{n-m+1}\, p^{(n-m+1,m-1)} + \frac{1}{n-m+1}\, p^{(n-m+1,m)}(z-x).$$

Cette équation étant démontrée généralement, et indépendamment des valeurs de m et n, on pourra y écrire successivement $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$, &c. à la plce de m, et $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, &c. à la place de n; les deux premières suppositions faites séparément, donneront

$$p^{(n-m+1,m-1)} = \frac{m-1}{n-m+2}\, p^{(n-m+2,m-2)} + \frac{1}{n-m+2}\, p^{(n-m+2,m-1)}(z-x),$$

et

$$p^{(n-m+1,m)} = \frac{m}{n-m+2}\, p^{(n-m+2,m-1)} + \frac{1}{n-m+2}\, p^{(n-m+2,m)}(z-x),$$

valeurs qui, substituées dans celle de $p^{(n-m,m)}$, le changeront en

$$p^{(n-m,m)} = \frac{m(m-1)}{(n-m+1)(n-m+2)}\, p^{(n-m+2,m-2)} + 2\frac{m}{(n-m+1)(n-m+2)}\, p^{(n-m+2,m-1)}(z-x) + \frac{1}{(n-m+1)(n-m+2)}\, p^{(n-m+2,m)}(z-x)^2.$$

Les deux secondes suppositions faites séparément, et les deux premières faites à-la-fois, donneront

$$p^{(n-m+2,m-2)} = \frac{m-2}{n-m+3}\, p^{(n-m+3,m-3)} + \frac{1}{n-m+3}\, p^{(n-m+3,m-2)}(z-x),$$

$$p^{(n-m+2,m-1)} = \frac{m-1}{n-m+3}\, p^{(n-m+3,m-2)} + \frac{1}{n-m+3}\, p^{(n-m+3,m-1)}(z-x),$$

$$p^{(n-m+2,m)} = \frac{1}{n-m+3}\, p^{(n-m+3,m-1)} + \frac{1}{n-m+3}\, p^{(n-m+3,m)}(z-x),$$

ce

Digitized by Google

ce qui changera la valeur de $p^{(n-m,m)}$ en

$$p^{(n-m,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)}{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)} p^{(n-m+3,m-3)}$$
$$+ 3\frac{m(m-1)}{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)} p^{(n-m+3,m-2)}(z-x)$$
$$+ 3\frac{m}{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)} p^{(n-m+3,m-1)}(z-x)^2$$
$$+ \frac{1}{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)} p^{(n-m+3,m)}(z-x)^3.$$

En continuant toujours de même, et représentant par r le nombre des valeurs de $p^{(n-m,m)}$ trouvées successivement, il est évident, d'après la marche du calcul, que la dernière de ces r valeurs sera

$$p^{(n-m,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+r)} p^{(n-m+r,m-r)}$$
$$+ r\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+2)}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+r)} p^{(n-m+r,m-r+1)}(z-x)$$
$$+ r\frac{r-1}{2}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+3)}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+r)} p^{(n-m+r,m-r+2)}(z-x)^2$$
$$+ r\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+4)}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+r)} p^{(n-m+r,m-r+3)}(z-x)^3 + \&c.$$

En faisant $r = m$, on aura l'expression de cette quantité en fonction de la première dérivée de la suite, qui est prise par rapport à x seul, et des dérivées de celle-ci par rapport à z, ainsi qu'il suit:

$$p^{(n-m,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots1}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n} p^{(n,0)} + m\frac{m(m-1)(m-2)\ldots2}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n} p^{(n,1)}(z-x)$$
$$+ m\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots3}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n} p^{(n,2)}(z-x)^2$$
$$+ m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots4}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n} p^{(n,3)}(z-x)^3 + \&c.$$

Multipliant cette valeur par son coëfficient dans la dérivée complète, qui, en prenant ses facteurs dans un ordre inverse, est $\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n}{m(m-1)(m-2)\ldots1}$, on trouvera que le terme représenté par $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m} p^{(n-m,m)}$ est égal à

$$p^{(n)} + \frac{m}{1.1}p^{(n,1)}(z-x) + \frac{m}{1.1}\cdot\frac{m-1}{2.2}\cdot p^{(n,2)}(z-x)^2 + \frac{m}{1.1}\cdot\frac{m-1}{2.2}\cdot\frac{m-2}{3.3}p^{(n,3)}(z-x)^3 + \&c.$$

Digitized by Google

série qui se termine nécessairement, et dont la loi est très-simple et très-remarquable.

Cette série donne la valeur de l'une quelconque des dérivées partielles de p de l'ordre n, qui est représentée, en général, par $p^{(n-m,m)}$, pourvu qu'on ait la valeur de la dérivée du même ordre $p^{(n,)}$ par rapport à x seul, puisqu'il ne s'agit que d'en tirer les valeurs de $p^{(n,1)}$, $p^{(n,2)}$, $p^{(n,3)}$, &c. par des dérivations successives relatives à z, de les substituer dans l'expression précédente, et de diviser le résultat de cette opération par

$$\frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)}{1.2.3.....m}.$$

Note relative aux fonctions de deux variables.

Pour appliquer aux fonctions de deux variables ce que nous avons dit au commencement de ce mémoire, sur une nouvelle manière de rendre rigoureuse et uniforme l'application de la théorie des fonctions dérivées à la géométrie et à la mécanique, il faut faire voir que si l'on prend la fonction dérivée de $f(x,y)$, relativement à l'une des deux variables, et ensuite la dérivée de la fonction qui résulte de cette première opération, en faisant varier l'autre variable, la fonction ainsi obtenue, et que nous représentons par $f'^{,}(x,y)$, jouira seule de la propriété de prendre toujours pour des valeurs de x comprises entre X et x, et pour des valeurs de y comprises entre y et Y, une valeur plus grande et une valeur plus petite que

$$\frac{f(X,Y)-f(x,Y)-f(X,y)+f(x,y)}{(X-x)(Y-y)}.$$

Pour le démontrer, on remarquera d'abord qu'en regardant y comme constante dans $f(x,y)$, on peut appliquer à cette quantité considérée comme une fonction de x seul, tout ce qui a été dit des fonctions d'une seule variable. Ainsi $f'^{,}(x,y)$ aura pour des valeurs de x depuis x jusqu'à X, une valeur plus grande et une valeur plus petite que

$$\frac{f'(X,y)-f'(x,y)}{X-x},$$

y ayant une même valeur quelconque dans les trois fonctions. Ainsi si l'on y fait varier y depuis y jusqu'à Y, il y aura parmi toutes les valeurs qu'on obtiendra pour

Digitized by Google

$f'(x,y)$, en y faisant varier à-la-fois x et y, depuis x jusqu'à X, et depuis y jusqu'à Y, une valeur plus grande et une plus petite que toutes celles que prendra

$$\frac{f'(X,y)-f'(x,y)}{X-x},$$

en y faisant varier y seul toujours entre les mêmes limites. Mais X et x devant être alors considérés comme deux constantes, il y aura parmi toutes les valeurs que prendra cette quantité, une valeur plus grande et une plus petite que sa primitive par rapport à y prise depuis y jusqu'à Y, et divisée par $Y-y$; pour avoir cette primitive, il faut, de celle de ses valeurs qui répond à Y, savoir,

$$\frac{f(X,Y)-f(x,Y)}{X-x},$$

ôter celle qui répond à y, et qui est

$$\frac{f(X,y)-f(x,y)}{X-x};$$

on trouvera, en divisant le reste par $Y-y$, la quantité

$$\frac{f(X-Y)-f(x,Y)-f(X-y)+f(x,y)}{(X-x)(Y-y)}$$

qui sera comprise entre la plus grande et la plus petite valeur dont

$$\frac{f'(X,y)-f'(x,y)}{X-x}$$

soit susceptible depuis y jusqu'à Y; et comme ces deux valeurs sont elles-mêmes comprises entre la plus grande et la plus petite de $f''(x,y)$, il s'ensuit que

$$\frac{f(X,Y)-f(x,Y)-f(X,y)+f(x,y)}{(X-x)(Y-y)}$$

sera comprise entre ces dernières.

On démontrera, comme on l'a fait à l'égard des fonctions d'une variable, que la fonction $f''(x,y)$ est la seule qui puisse jouir de cette propriété pour toute les valeurs de x et y, quelque rapprochée que X soit de x et Y de y, et on en conclura qu'il suffit de démontrer qu'elle appartient à une fonction dépendante d'une autre fonction représentée par $f(x,y)$, pour qu'il soit démontré qu'elle est égale à $f''(x,y)$.

Si l'on a l'équation d'une surface entre trois variables x, y, z, et qu'on représente par $f(x,y)$ la portion du volume du corps terminé par cette surface qui se trouve entre elle, les trois plans coordonnés, et ceux qui ont pour abscisses x

Digitized by Google

et y, on pourra considérer les quatre valeurs de z qui répondent aux coordonnées,

$$x, y$$
$$x, Y$$
$$X, y$$
$$X, Y,$$

comme les quatre arêtes d'un prisme dont la partie interceptée entre le plan des $x\,y$, et la surface sera égale à

$$f(X, Y) - f(x, Y) - f(X, y) + f(x\,y).$$

Cette portion de prisme est évidemment comprise entre le prisme de même base qui aurait pour hauteur la plus grande valeur de z depuis x jusqu'à X, et depuis y jusqu'à Y, et le prisme dont la hauteur serait égale à la plus petite valeur de z dans les mêmes limites. La base commune à tous ces prismes, étant égale à $(X - x)\,(Y - x)$, on verra, en divisant par cette quantité, que la plus grande valeur de z surpasse

$$\frac{f(X, y) - f(x\,Y) - f(X, y) + (x, y)}{(X - x)\,(Y - y)},$$

et que la plus petite est moindre que la même quantité; d'où l'on conclura la formule générale de l'évaluation des valeurs

$$z = f'' (x, y).$$

Pour avoir celle des surfaces, on remarquera qu'en représentant la surface par $F(x,y)$, la portion qu'en retranchera la surface prismatique dont nous venons de parler, sera égale à

$$F(X, Y) - F(x, Y) - F(X, y) + F(x, y),$$

et sera plus grande que la portion de celui de ses plans tangens qui est le moins incliné sur le plan des $y\,x$, et qui est terminé par la même surface prismatique, puisque ce plan est par-tout moins incliné que la portion de surface courbe, si ce n'est au point de contact, où il l'est autant. On démontrera de même que la même portion de surface sera plus petite que celle du plan tangent le plus incliné parmi ceux qui la touchent, en observant de prendre x et X, y et Y assez peu différens pour que le plan tangent ne devienne nulle part dans cet intervalle, perpendiculaire à celui des $x\,y$, ce qui rendrait infinie la portion terminée par la surface prismatique.

Or, si l'on représente l'équation de la surface par $z = f(x, y)$, et par x, y, z, les coordonnées de l'un quelconque des plans tangens, on trouvera que ce plan

Digitized by Google

passant par une tangente parallèle au plan des $y\,z$, dont l'inclinaison sur celui des $x\,y$ a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{[1+f'_{,}(x,y)]^2}}$, et par une tangente parallèle au plan des $x\,z$, dont l'inclinaison sur celui des $x\,y$ a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{[1+f_{,}'(x,y)]^2}}$, le cosinus de son inclinaison est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{[1+f'_{,}(x,y)^2+f_{,}'(x,y)]^2}};$$

d'où il suit que la portion de ce plan interceptée par la surface prismatique, a pour valeur

$$(X-x)\,(Y-y)\,\sqrt{[1+f'(x,y)^2+f'(x,y)]^2},$$

divisant par

$$(X-x)\,(Y-y),$$

on voit que la plus grande valeur de

$$\sqrt{[1+f'(x,y)^2+f'(x,y)]^2}$$

surpasse

$$\frac{F(X,Y)-f(x,Y)-f(X,y)+f(x,y)}{(X-x)\,(Y-y)},$$

et que la plus petite est moindre que la même quantité; d'où il résulte que

$$F'(x,y)=\sqrt{[1+f'(x,y)^2+f'(x,y)]^2},$$

qui est la formule connue pour l'évaluation des aires des surfaces courbes.

Digitized by Google

MÉCANIQUE.

Sur la composition des Momens et la composition des Aires.

Lu à l'Institut national en Floréal an 12.

Par M. LOUIS POINSOT, Professeur au Lycée BONAPARTE, ancien Élève de l'École Polytechnique.

Des couples.

DANS ma *Statique*, j'ai nommé *couple* l'ensemble de deux forces parfaitement égales, parallèles et de sens opposés. On sait que ces deux forces n'ont pas de résultante, c'est-à-dire, ne peuvent être tenues en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace. A la vérité, le calcul qui donne, pour cette résultante, une force nulle appliquée à une distance infinie des composantes, ne nous apprend plus rien alors, puisqu'il donne la même expression pour deux autres forces quelconques égales, parallèles et de sens opposés, dont l'effet pourtant n'est pas le même que celui des deux premières; mais il est évident *à priori*, que de telles forces ne peuvent avoir de résultante unique : car si l'on pouvait assigner la position de cette résultante à l'égard de l'une des forces du couple, on lui en trouverait sur-le-champ une autre parfaitement symétrique et de sens contraire à l'égard de la seconde; et elle aurait à-la-fois deux positions différentes, ce qui est absurde.

L'effort d'un couple ne peut être contre-balancé que par celui d'un autre couple. J'ai fait voir que cet effort a pour mesure le produit de l'une des forces par la distance qui les sépare; de sorte qu'en nommant ce produit le *moment* du couple, deux couples contraires se font équilibre, quand leurs momens sont égaux.

Composition des couples analogue à la composition des forces.

J'ai d'ailleurs établi sur les couples tous les théorèmes correspondans à ceux de la composition des forces; et même cette proposition (dont on fait si souvent usage) qu'une force peut être transportée en un point quelconque de sa direction, trouve ici son analogue, qui

Digitized by Google

consiste en ce qu'*un couple peut être transporté par-tout où l'on voudra dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet en soit changé.*

Ainsi des couples situés arbitrairement dans le même plan ou dans des plans parallèles, sont des couples de même direction; d'où l'on voit combien est illusoire l'expression que donne le calcul pour la résultante d'un couple, puisque, d'après cette propriété, il n'y aurait pas de lieu de l'espace où l'on ne pût la supposer appliquée, ce qui n'a plus aucun sens.

Mais la proposition précédente est principalement utile dans la composition des couples, où elle permet de les rapprocher et de les disposer entre eux de la manière la plus favorable à la démonstration, et nous conduit, par une voie très-simple, aux théorèmes suivans :

« 1.° Deux couples situés d'une manière quelconque dans le même » plan ou dans deux plans parallèles, se composent en un seul égal » à leur somme ou à leur différence, selon que ces deux couples sont » de même sens ou de sens contraire;

» 2.° Deux couples situés d'une manière quelconque dans deux plans » perpendiculaires aux deux côtés d'un parallélogramme, et représentés » en grandeurs par ces côtés, se composent en un seul situé dans un » plan perpendiculaire à la diagonale, et représenté en grandeur par » cette diagonale. »

D'où l'on peut conclure que « trois couples perpendiculaires aux » trois arêtes contiguës d'un parallélipipède quelconque, et représentés » pour leurs momens par les longueurs de ces arêtes, se composent » en un seul, perpendiculaire à la diagonale, et représenté pour son » moment par la longueur de cette diagonale. »

Ces théorèmes, comme nous le verrons tout-à-l'heure, renferment la théorie des momens considérée de la manière la plus générale, et la théorie des aires qui ne sont autre chose, dans le mouvement des corps, que les momens des forces qui les animent; mais ils se démontrent avec autant de simplicité que le parallélogramme des forces, et font

Digitized by Google

descendre ainsi dans les Élémens, les propositions les plus élevées de la mécanique.

Qu'on me permette ici d'en rappeler en peu de mots l'usage dans la statique, et, sans cesser de tendre vers l'objet de ce mémoire, d'y arriver dans l'ordre naturel de nos idées.

I.

Usage des couples dans la statique.

Une force étant appliquée en un point d'un corps ou système quelconque solide, si l'on prend un autre point quelconque dans ce corps ou au-dehors, pourvu qu'on l'y suppose invariablement attaché, et qu'on applique à ce nouveau point deux forces contraires égales et parallèles à la première; il est clair que l'état du corps ne sera pas changé. Mais l'on pourra considérer actuellement, au lieu de la simple force proposée, 1.° une force parfaitement égale, parallèle et de même sens, appliquée au nouveau point; 2.° un couple formé par les deux forces parallèles restantes. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera au point dont il s'agit qu'une force parfaitement égale et parallèle à la force primitive, et qui ne serait en quelque sorte que cette même force qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même.

On peut donc dire qu'une force peut être transportée parallèlement à elle-même en un point quelconque, pourvu que l'on considère le couple qu'elle engendre dans cette translation, et qui a pour mesure le produit de la force par le chemin qu'elle a parcouru.

Cela posé, tant de forces que l'on voudra étant appliquées d'une manière quelconque à un corps, si on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes en un même point quelconque, elles viendront s'y composer en une seule que je nommerai la *résultante*, et tous les couples qu'elles ont produits dans leur translation se composeront en un seul, que je nommerai le *couple résultant*.

Composition générale des forces.

Ainsi, *des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent toujours*

Digitized by Google

toujours se réduire à une seule, et à un couple unique, lesquels sont, en général, situés dans des plans différens. Sur quoi l'on peut observer que la direction, la quantité et le sens de la résultante seront toujours les mêmes, en quelque lieu qu'on ait pris l'*origine*, c'est-à-dire, le point où l'on a transporté toutes les forces. En variant la position de ce point, la résultante ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en divers lieux de l'espace, mais le plan et la valeur du couple changeront nécessairement.

Mais quelle que soit la position de l'origine, un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace, il résulte de ce que nous venons de dire, qu'il ne pourra jamais y avoir équilibre entre les forces, à moins que la résultante et le couple résultant ne soient tous les deux nuls à-la-fois.

Loix de l'équilibre.

« Ainsi toutes les forces appliquées au corps, étant transportées pa-
» rallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, doivent s'y faire
» équilibre entre elles ; et tous les couples qu'elles produisent en se
» transportant en ce point, doivent aussi se faire équilibre entre eux. »

Telles sont les propriétés générales de l'équilibre, c'est-à-dire, les conditions qui existent nécessairement dans l'équilibre de tout système libre. Elles fournissent les six équations connues ; la résultante devant être égalée à zéro suivant trois axes quelconques dans l'espace, et le couple résultant, suivant trois plans différens qu'on peut supposer conduits par ces axes.

A quoi elles se réduisent quand il y a un point fixe dans le système.

Ces trois dernières équations suffisent lorsqu'il y a un point fixe dans le système, en supposant qu'on ait pris ce point pour l'origine : car la résultante se trouvant détruite par sa résistance, peut avoir telle valeur qu'on voudra, et il suffit que le couple résultant soit nul. On voit bien nettement par-là que la pression exercée sur le point fixe est identiquement la même que si toutes les forces du système y étaient transportées parallèlement à leurs directions ; car elles y sont actuellement transportées, et pour les couples qu'elles ont produits, comme ils doivent être en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire, quand bien même le corps

Digitized by Google

ne serait pas soutenu, il est évident qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe.

Propriété nouvelle de l'équilibre d'un corps solide.

Lorsque des forces sont en équilibre autour d'un système quelconque invariable de forme, on sait qu'elles peuvent toutes varier proportionnellement à leurs grandeurs sans cesser de se faire équilibre. Mais on voit ici qu'elles peuvent encore s'approcher ou s'éloigner toutes d'un même point quelconque proportionnellement à leurs distances à ce point, sans que cet équilibre soit troublé : car si chaque force se meut ainsi parallèlement à elle-même dans le plan formé par sa direction, et le point dont il s'agit, elle augmente ou diminue le couple qu'elle donne à son égard dans le même rapport que sa distance à ce point; et par conséquent tous les couples du système conservent leurs positions, et demeurent proportionnels.

Condition nécessaire pour qu'un système quelconque de forces ait une résultante unique.

Les forces appliquées au système étant ramenées, comme nous venons de le voir, à une seule force et à un seul couple; si la force se trouve parallèle au plan du couple, on pourra amener ce couple dans un même plan avec elle, et les réduire tous deux à une force unique : et réciproquement, comme il est visible qu'une force et un couple ne peuvent se réduire à une force unique sans être dans le même plan ou dans des plans parallèles, ce qui est ici la même chose; il s'ensuit que « des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, ne » peuvent jamais se réduire à une seule, à moins que la résultante de » toutes ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un » point quelconque, n'ait une direction parallèle au plan du couple » résultant. »

C'est par-là qu'on peut voir comment trois forces dirigées dans des plans différens, peuvent se composer en une seule, sans qu'il y ait aucune rencontre entre leurs directions; et comment une force peut se décomposer suivant trois directions qui ne rencontrent pas la sienne, et qui ne se rencontrent pas entre elles.

Expression analytique des propriétés précédentes.

Pour soumettre les propositions précédentes au calcul, concevons à l'origine où l'on transporte toutes les forces, trois axes quelconques,

Digitized by Google

que nous prendrons rectangulaires entre eux, pour plus de simplicité dans les expressions.

Soit R la résultante générale; X, Y, Z ses trois composantes suivant les axes des x, y, z; soient α, β, γ les trois angles respectifs que sa direction forme avec eux.

On aura par le parallèlipipède des forces,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$\text{et cos. } \alpha = \frac{X}{R}, \text{ cos. } \beta = \frac{Y}{R}, \text{ cos. } \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Or X, Y, Z sont respectivement égales aux sommes des forces décomposées parallèlement aux trois axes des x, y, z: on trouvera donc facilement par ces équations la valeur et la direction de la résultante générale. La première condition de l'équilibre, qui veut que cette résultante soit nulle, donnera ce qu'on nomme les trois équations de l'équilibre de *translation*, qui reviennent à ce que la somme des forces estimées suivant trois axes quelconques, soit nulle d'elle-même par rapport à chacun de ces axes.

Soit G le moment du couple résultant; L, M, N les momens respectifs des trois couples dans lesquels il se décompose perpendiculairement aux trois axes des x, y, z; soient λ, μ, ν les trois angles que forme avec ces axes une perpendiculaire au plan de ce couple, et que nous nommerons l'*axe* du couple.

On aura par le parallèlipipède des couples,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

$$\text{et cos. } \lambda = \frac{L}{G}, \text{ cos. } \mu = \frac{M}{G}, \text{ cos. } \nu = \frac{N}{G}.$$

Or il est facile de voir que les couples L, M, N sont respectivement égaux aux sommes des momens pris dans l'acception ordinaire par rapport aux trois axes x, y, z, c'est-à-dire, aux sommes des produits qui résultent des forces projetées sur chacun des plans coordonnés, multipliées par leurs distances à l'axe qui lui est perpendiculaire : on trouvera

Digitized by Google

donc facilement par les équations ci-dessus la valeur et la position du couple résultant.

La seconde condition générale de l'équilibre, qui veut que ce couple soit nul, donnera ce qu'on appelle les équations de l'équilibre de *rotation*, qui consistent en ce que la somme des momens de toutes les forces, par rapport aux trois axes coordonnés, soit nulle d'elle-même relativement à chacun de ces axes.

Que ces sortes de produits qu'on appelle *momens*, mesuraient toujours des forces secrètes que les couples ont mises en évidence.

On voit ici par l'identité des couples avec les momens tels qu'on les considère ordinairement en statique, quel rôle jouent ces sortes de produits dans la composition générale des forces et dans les lois de leur équilibre. A la vérité, dans l'équilibre d'un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, les lois connues du levier nous montraient bien ces produits comme les efforts des puissances pour faire tourner le corps autour de cet axe ; puisque l'on trouvait que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens doit être égale à la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Mais lorsqu'il n'y avait aucun point d'appui, et que le système était parfaitement libre dans l'espace, les momens ne restaient plus dans les conditions de l'équilibre que comme de simples expressions de calcul, et perdaient cette espèce de signification que leur donne la présence d'un axe fixe, et qui les avait fait nommer *momens* par les anciens géomètres. Or, par la théorie des couples, ils reparaissent dans l'équilibre des corps libres, comme dans l'équilibre des corps gênés par des obstacles. Estimés par rapport à un point quelconque du corps, ils mesurent certains efforts particuliers que l'on peut concevoir comme engendrés par les puissances qui se transportent parallèlement à elles-mêmes en ce point, et qui, tandis que ces puissances s'y composent et s'y font équilibre à leur manière, doivent aussi se composer et se faire équilibre à la leur. Ce n'est pas qu'au fond les idées de momens et de couples ne soient parfaitement les mêmes. L'analyse n'a pour objet que de simples rapports ; et les diverses grandeurs, sous ses formules, ne conservent plus aucune trace des premières idées qu'on y avait jointes.

Digitized by Google

Mais en géométrie, comme en algèbre, la plupart des idées différentes ne sont que des transformations ; les plus lumineuses et les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image, et que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans le calcul : or, les couples ont éminemment cet avantage sur les momens ; et si l'on considère en outre que la théorie des momens se présente d'elle-même dans la réduction générale des forces et dans les conditions de leur équilibre, on verra que la composition des couples exposée ci-dessus, tant par la symétrie des théorèmes que par la simplicité des démonstrations, vient se ranger naturellement à côté de la composition des forces, et forme ainsi la seconde partie essentielle des Élémens.

Équation de condition pour que le système des forces ait une résultante unique.

Nous avons vu tout-à-l'heure que si des forces quelconques sont réductibles à une seule, la résultante générale sera parallèle au plan du couple résultant. Pour exprimer cette condition dans le calcul, il n'y a donc qu'à exprimer que l'axe du couple est perpendiculaire à la direction de la résultante, ou que le cosinus de leur inclinaison mutuelle est nul. Mais d'après les dénominations précédentes, le cosinus de cet angle est $\cos.\alpha.\cos.\lambda + \cos.\beta.\cos.\mu + \cos.\gamma.\cos.\nu$, expression qui étant égalée à zéro, après y avoir substitué à la place des cosinus leurs valeurs, donne sur-le-champ $XL + YM + ZN = 0$, qui établit la relation cherchée entre les forces et leurs momens estimés par rapport aux trois axes.

Équations de condition pour qu'il y ait une résultante unique qui passe en un point donné.

Mais si l'on voulait exprimer que les forces sont réductibles à une seule qui passe en un point donné, en supposant qu'on ait pris ce point pour l'origine, il faudrait exprimer que le couple résultant est nul ; ce qui exige les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, qui nous font voir que la somme des momens doit être nulle par rapport à trois axes qui se croisent au point donné.

II.

Composition générale des couples ou des momens.

Le couple résultant G décomposé perpendiculairement à un axe qui forme avec le sien un angle θ, étant égal à $G\cos.\theta$; si l'on nomme

Digitized by Google

λ', μ', ν', les trois angles que cet axe forme avec ceux des coordonnées, comme on a par la géométrie,

$$\text{Cos. } \theta = \text{cos. } \lambda . \text{cos. } \lambda' + \mu \text{ cos. } \mu' + \text{cos. } \nu \text{ cos. } \nu',$$

on trouvera G cos. $\theta = L$ cos. $\lambda' + M$ cos. $\mu' + N$ cos. ν',

formule très-simple et très-importante dans la mécanique, et qui nous apprend « que si l'on connaît les sommes L, M, N des momens par » rapport à trois axes rectangulaires, on trouvera sur-le-champ la » somme des momens par rapport à un axe quelconque, en multipliant » ces trois sommes respectives par les cosinus des angles que les trois » axes font avec le nouvel axe donné. »

C'est ainsi qu'en géométrie, pour projeter une ligne sur un axe quelconque, on peut d'abord projeter cette ligne sur trois axes rectangulaires, projeter ensuite ces trois projections sur l'axe donné, et ajouter ensemble ces projections de projections.

Du moment *maximum* par rapport aux axes qui se croisent en un même point.

Puisque la somme des momens, par rapport à un axe qui fait avec celui du couple résultant un angle θ, est G cos. θ, il s'ensuit :

« 1.° Que de tous les axes qui passent par l'origine, l'axe du couple » résultant est celui par rapport auquel la somme des momens est la » plus grande ;

» 2.° Que la somme des momens est la même par rapport à tous » les axes qui font un même angle avec celui du plus grand moment, » ou qui forment une surface conique décrite autour de lui sous cet » angle ;

» 3.° Que la somme des momens est nulle par rapport à tous ceux qui » font cet angle droit, ou qui forment un plan perpendiculaire à sa » direction. »

L'axe et la valeur du moment *maximum* se trouvent, comme l'axe et la valeur du couple résultant, par les équations données plus haut, et qui nous montrent « que le carré du moment *maximum* est égal à » la somme des carrés des momens par rapport à trois axes rectangu- » laires ; et que son axe est la diagonale du parallélipipède construit

Digitized by Google

» sur les trois lignes qui représenteraient sur ces axes les grandeurs » respectives des trois momens précédens. »

Ce sont les beaux théorèmes qu'a donnés l'auteur de la *Mécanique céleste*, et que nous allons retrouver sous une autre forme dans la Dynamique.

Du moment *minimum maximorum.*

Mais observons que tout ce que nous venons de dire est relatif à l'origine que l'on a choisie pour y transporter toutes les forces. En prenant cette origine ailleurs, la quantité, le sens de la résultante générale, ne changent pas, et sa direction demeure toujours parallèle à elle-même; mais le moment du couple résultant ou le moment *maximum*, varie de grandeur, et son axe s'incline sur sa première position. Pour chacun des points de l'espace, considérés successivement comme origines, il y a donc un axe autour duquel la somme des momens est un *maximum* relativement à tous les axes qui se croisent au même point. On pourrait donc demander en quel lieu il faudrait prendre l'origine ou le centre des momens, pour que le moment *maximum* y fût plus petit que par-tout ailleurs, et par conséquent fût le *minimum* des momens *maxima* relativement à tous les points de l'espace.

Pour trouver facilement la position de ce point, regardons toutes les forces comme réduites à une seule et à un couple par rapport à un point quelconque connu; et suivons les variations qu'éprouve ce couple par le déplacement de l'origine.

D'abord il est visible qu'en déplaçant l'origine dans la direction même de la résultante générale, le couple résultant ne change pas; car le couple que fournit la résultante en se transportant en un autre point de sa propre direction, est nul de lui-même, et le couple primitif n'est pas altéré. Nous voyons donc que *les momens* maxima *sont constans pour toutes les origines prises le long d'une même droite parallèle à la direction de la résultante générale, et que leurs axes sont parallèles entre eux.* Ainsi, tout ce que nous avons dit plus haut des momens par rapport aux axes qui se croisent en un même point, subsiste de la même manière et avec les mêmes valeurs, pour tous les points de la résultante qui y passe.

Digitized by Google

Supposons donc que l'origine s'écarte de cette direction, et soit tellement placée dans l'espace, que le couple résultant soit perpendiculaire à la direction de la résultante; je dis qu'alors ce couple est dans la position du *minimum*; car si l'on déplace actuellement l'origine d'une manière quelconque, il ne pourra qu'augmenter. En effet, la résultante, en changeant de position, produira un couple perpendiculaire sur le premier; et puisque ces deux couples sont rectangulaires, ils donneront par leur composition le nouveau couple résultant plus grand que l'un ou l'autre d'entre eux : donc le premier couple résultant aura augmenté; donc il se trouvait dans la position du *minimum*, lorsqu'il était perpendiculaire à la direction de la résultante générale, ou lorsque son axe coïncidait avec elle.

Comment on détermine l'axe du moment *minimum maximorum*.

Soit donc G une ligne qui représente à-la-fois l'axe et la valeur du couple résultant par rapport à un point connu; R une autre ligne qui représente la valeur et la direction de la résultante en ce point, Φ l'angle que forment ces deux droites.

Pour avoir l'origine du couple résultant *minimum*, il faudra transporter la résultante R parallèlement à elle-même, de telle sorte et d'une telle quantité p que le couple Rp qu'elle produira étant composé avec le couple primitif G, forme un couple résultant dont l'axe soit R.

L'axe du couple Rp doit donc être dans le plan des deux lignes R et G qui font un angle Φ; d'ailleurs il est nécessairement perpendiculaire à la direction R; donc on aura, par le parallélogramme des couples,

$$Rp = G \text{ sin. } \Phi$$

et pour la valeur K du couple *minimum*,

$$K = G \text{ cos. } \Phi.$$

Ainsi en élevant au sommet de l'angle Φ, et sur le plan de cet angle, une perpendiculaire $p = \frac{G \text{ sin. } \varphi}{R}$, et menant par l'extrémité de cette perpendiculaire une parallèle à la direction de la résultante générale; on aura l'axe du *minimum maximorum* des momens; et l'origine pourra être prise par-tout où l'on voudra sur cet axe.

Cet

Digitized by Google

De l'axe *central* des momens.

Cet axe remarquable où la somme des momens est à-la-fois un *maximum* relativement aux axes qui se croisent au même point que lui, et un *minimum* relativement à ceux qui donnent les momens *maxima* aux divers points de l'espace, pourrait se nommer l'axe *central* des momens; et cette dénomination, déjà motivée en ce qu'il jouit d'une propriété exclusive par rapport à tous les autres, se trouve pleinement justifiée, si l'on observe qu'aux mêmes distances autour de lui, les momens *maxima* sont les mêmes, et que leurs axes ont à son égard des positions semblables.

En effet, le même raisonnement qui nous a fait passer tout-à-l'heure du couple résultant G au couple *minimum* K, nous ramène dans l'ordre inverse de celui-ci au premier, et par les mêmes équations,

$$Rp = G \sin. \varphi, \text{ et } K = G \cos. \varphi.$$

Mais ici, de quelque côté qu'on transporte la résultante R, pourvu que ce soit à une même distance p de sa position actuelle ou de l'axe *central*, on trouvera toujours un couple résultant G de même valeur, et une même inclinaison φ entre son axe et la résultante; et de plus, le plan de ces deux droites sera toujours perpendiculaire à la ligne p: puisque si tout cela n'avait pas lieu comme ci-dessus, en ramenant la résultante dans l'axe central, on ne retrouverait plus le même couple *minimum* K, ce qui ne peut pas être.

« Les momens *maxima* sont donc constans non-seulement pour » toutes les origines prises le long d'une parallèle à la résultante, comme » nous l'avions déjà remarqué, mais encore pour toutes les origines » prises sur le cylindre que décrirait cette droite autour de l'axe central » qui lui est parallèle.

» Pour les axes de ces momens, tant que l'origine ne sort pas d'une » même génératrice de ce cylindre, ils demeurent parallèles entre eux, » et forment un plan; mais si l'origine passe d'une génératrice à l'autre » par la circonférence d'un cercle, ils forment une hyperboloïde de » révolution autour de l'axe central. »

Les momens *maxima* G ne varient donc qu'avec les distances p de

Digitized by Google

leurs origines à l'axe central, et les deux équations précédentes nous donnent :

$$G^2 = R^2 p^2 + K^2,$$

équation qui nous fait voir que ces momens croissent pour les origines prises à différentes distances de l'axe central, comme les ordonnées d'une hyperbole dont ces distances seraient les abscisses; ainsi leurs valeurs augmentent sans bornes, et il n'y a pas de moment *maximum maximorum;* ce qui était d'ailleurs assez évident de soi-même.

On a de plus, tang. $\Phi = \frac{Rp}{K}$, ce qui donne les inclinaisons des axes des momens *maxima* sur l'axe central, et nous montre que leurs tangentes varient dans le rapport des distances de leurs origines à cet axe.

Remarquons que dans le cas où la résultante générale est nulle, on a par la première équation $G = K$, quelle que soit la valeur de p.

Lors donc que les forces appliquées sont telles, qu'étant transportées en un même point elles se font équilibre entre elles, les momens *maxima* sont les mêmes pour tous les lieux de l'espace, et leurs axes sont tous parallèles.

Si les forces appliquées ont une résultante unique, comme on a pour cette condition cos. $\Phi = 0$, l'équation $K = G \cos. \Phi$ donne $K = 0$; c'est-à-dire, que le moment *minimum maximorum* est nul, comme il est clair que cela doit être, puisque l'origine tombe alors sur la direction même de la seule force à laquelle se réduisent toutes celles du système.

Classification de tous les axes de l'espace auxquels on voudrait rapporter les momens d'un système de forces.

Telle est donc la théorie générale exposée ci-dessus, que tous les axes de l'espace auxquels on peut rapporter les momens d'un système quelconque de forces, peuvent être distingués et classés entre eux de la manière suivante :

Dabord, si, pour simplifier les choses, nous ne considérons que les axes qui se croiseraient aux divers points d'un même plan perpendiculaire à la direction de la résultante, nous observons,

Digitized by Google

1.° Que, parmi tous les axes qui se croisent en un même point, il y en a un seul distingué de tous les autres, en ce que la somme des momens y est un *maximum*.

Les autres se classent autour de lui en diverses surfaces coniques circulaires dont il serait l'axe commun. Pour tous ceux qui forment la même surface, les momens sont égaux, et ils varient d'un cône à l'autre en raison des cosinus des angles sous lesquels ces cônes sont décrits.

2.° Parmi tous les axes qui donnent les momens *maxima* relativement aux divers points du plan, il y en a un seul distingué de tous les autres, en ce qu'il donne le plus petit de ces *maxima*, ou le *minimum maximorum* des momens.

Les autres axes des *maxima* se classent autour de lui en diverses hyperboloïdes de révolution dont il serait l'axe commun. Pour tous ceux qui forment une même hyperboloïde, les momens *maxima* ont la même valeur, et ils varient d'une hyperboloïde à l'autre suivant les lois que nous avons données ci-dessus.

Actuellement, tout ce que nous venons de dire relativement aux diverses origines prises dans un même plan perpendiculaire à la résultante, subsiste de la même manière et avec les mêmes valeurs pour tous les lieux qu'occuperaient successivement tous ces points, en transportant le plan parallèlement à lui-même. Les momens *maxima* restent les mêmes autour des mêmes axes qui deviennent parallèles; et comme il n'y a parmi eux que l'axe du moment *minimum maximorum* qui soit perpendiculaire au plan mobile, on voit qu'il est le seul qui n'ait absolument qu'une même position dans l'espace; que, de plus, tous les axes qui ont à son égard des positions semblables, donnent les mêmes momens, et c'est ce qui nous a fait nommer cet axe unique, l'*axe central des momens*.

Au reste, les résultats précédens, tirés des raisonnemens les plus simples, pourraient aussi se déduire du calcul par la méthode ordinaire

Digitized by Google

de maximis et *minimis;* et l'on trouve aisément, pour l'axe du moment *minimum maximorum*, les équations suivantes :

$$(N + Yx - Xy)\,Y - (M + Xz - Zx)\,Z = 0,$$
$$(L + Zy - Yz)\,Z - (N + Yx - Xy)\,X = 0,$$
$$(M + Xz - Zx)\,X - (L + Zy - Yz)\,Y = 0;$$

x, y, z sont les coordonnées de cette ligne par rapport à trois axes autour desquels les sommes respectives des momens sont L, M, N; tandis que X, Y, Z sont les sommes des forces décomposées parallèlement aux mêmes axes.

L'une quelconque de ces équations est une suite nécessaire des deux autres ; et par conséquent elles ne représentent qu'une seule et même ligne droite, laquelle est manifestement parallèle à la direction de la résultante générale des forces.

On trouve encore, pour le lieu de tous les points relativement auxquels les momens *maxima* sont égaux et représentés par H, l'équation suivante :

$$(L - Yz + Zy)^2 + (M - Zx + Xz)^2 + (N - Xy + Yx)^2 = H^2$$

qui appartient à une surface cylindrique à base circulaire décrite autour de la première droite ; ce qui est conforme à ce que nous avons vu précédemment.

Mais nous ne nous arrêterons pas à ces détails, et nous passerons sur-le-champ aux applications de la théorie des momens à la dynamique.

III.

Application de la théorie précédente à la dynamique.

Soient tant de corps libres qu'on voudra qui se meuvent, sans aucune dépendance mutuelle, avec des vîtesses uniformes suivant des droites quelconques, dans l'espace.

Puisque chaque corps se meut uniformément en ligne droite, la force qui l'anime demeure constante et de même direction.

Donc la résultante générale de toutes les forces qui animent les corps

Digitized by Google

du système, et leur moment résultant par rapport à un point fixe quelconque, demeurent constamment les mêmes dans tout le cours du mouvement.

Conservation des forces, et conservation des momens.

Actuellement, si l'on suppose que tous ces corps qui étaient libres viennent tout-à-coup à se lier ensemble d'une manière quelconque, et à réagir encore les uns sur les autres en vertu de nouvelles forces quelconques, mais réciproques, c'est-à-dire, telles qu'entre deux corps l'action soit toujours parfaitement égale et contraire à la réaction, ce qui comprend toutes les forces de la nature, les mouvemens individuels des différens corps seront changés, et les forces qui les animent varieront de grandeurs et de directions, et continueront de varier à chaque instant du mouvement. Mais ce qui est bien remarquable et forme un des plus beaux principes de la dynamique, c'est que la résultante générale de toutes ces forces, et leur moment résultant par rapport au point fixe, demeureront toujours les mêmes qu'auparavant, et seroient encore conservés, si tous les corps redevenoient libres, et que chacun d'eux s'échappât en ligne droite avec la vîtesse qu'il a actuellement.

Démonstration très-simple de ces deux lois générales.

Ce principe qui se déduit des équations différentielles du mouvement, peut aussi se démontrer par un raisonnement si simple, que je ne crois pas devoir l'omettre ici.

Il est clair, en effet, que si chaque corps, à cause de sa liaison avec les autres, ne peut plus obéir pleinement à l'impulsion qu'il a reçue, sa force se décompose en deux autres, l'une qui est détruite, et l'autre qui subsiste actuellement. Tout se passe comme à la rencontre d'un obstacle invincible; excepté que la composante, qui serait anéantie par l'obstacle, va se reporter sur les autres corps qui la détruisent par leur action. La force de chaque corps étant ainsi remplacée par deux semblables composantes, la résultante de toutes ces nouvelles forces et leur moment résultant, sont toujours les mêmes qu'avant cette substitution. Mais les composantes, qui se font équilibre entre elles, donnent leur résultante et leur moment résultant nuls,

Digitized by Google

comme nous l'avons vu dans les lois générales de l'équilibre : donc la première résultante et le premier moment résultant sont conservés, et n'ont souffert aucune altération par l'action mutuelle des différens corps du système. Quant aux autres forces qui pourraient exister entre ces corps, comme elles sont réciproques, c'est-à-dire, deux à deux égales et contraires, elles ne changent rien non plus aux valeurs précédentes; car leur résultante et leur moment sont évidemment nuls d'eux-mêmes.

« On voit donc que, dans un système de corps qui ont reçu des » impulsions primitives et qui réagissent d'une manière quelconque les » uns sur les autres, la somme de toutes les forces qui les animent, » estimées suivant une même droite, et la somme de leurs momens » par rapport à un même axe fixe quelconque, demeurent constam- » ment les mêmes, malgré les variations qu'éprouvent les mouvemens » individuels des corps; et soit que ces mouvemens changent par des » nuances insensibles, soit qu'il survienne entre eux des changemens » brusques par l'action réciproque des corps, ou par toute autre liaison » nouvelle qu'on voudrait établir sur-le-champ entre ces corps. »

Ces deux propriétés générales du mouvement correspondent, suivant la remarque de M. *Laplace* aux deux propriétés générales de l'équilibre; les mêmes sommes qui doivent être nulles dans l'état d'équilibre, demeurent constantes dans l'état de mouvement; et la conservation des forces et des momens présentée de cette manière, subsiste également pour toutes les lois possibles entre la force et la vîtesse du corps en mouvement.

A quoi répondent les lois précédentes dans la nature.

Dans la nature, la force d'un corps en mouvement se mesure par le produit de la masse et de la vîtesse ; et le premier principe répond à la conservation du mouvement du centre de gravité, qui consiste en ce que ce centre se meut toujours uniformément en ligne droite, et de la même manière que si tous les corps du système y étaient réunis, et que les forces qui les animent s'y fussent transportées parallélement à elles-mêmes.

En second lieu, si l'on prend un point fixe quelconque, et que de

Digitized by Google

ce point fixe ou *foyer*, on mène à tous les corps du système des rayons vecteurs, en projetant toutes ces droites sur un plan quelconque, on verra facilement que le moment de chaque force par rapport à un axe perpendiculaire au plan de projection, et passant par le foyer, est proportionnel au produit de la masse du corps par l'aire que trace sur ce plan la projection de son rayon vecteur.

Ainsi, dans la loi de la nature, la conservation des momens revient à la conservation des aires, qui consiste en ce que la somme des produits des corps par les aires respectives que tracent les projections de leurs rayons vecteurs sur un plan fixe quelconque mené par le foyer, est proportionnelle au temps, c'est-à-dire, est toujours la même, en temps égal, pendant tout le mouvement du système.

Si toutes les masses du système étaient égales entre elles, on n'aurait pas besoin de considérer leurs produits respectifs par les aires précédentes, mais simplement ces aires elles-mêmes, et le théorème reviendrait à ce que la somme des aires décrites par les rayons vecteurs autour du foyer est toujours égale au temps donné. C'est ainsi qu'on peut toujours énoncer le principe des aires, mais en supposant que les masses du système soient divisées en parties égales, et qu'on ait tiré du foyer des rayons vecteurs à toutes ces parties.

Les aires.

Cela posé, puisque les aires tracées par les rayons vecteurs ne sont autre chose que les momens des forces, il s'ensuit qu'on peut appliquer à la composition des aires tout ce que nous avons dit de la composition des momens.

Plan du *maximum* des aires.

Et d'abord on voit que, parmi tous les plans menés par le même foyer, et qui reçoivent de la part des rayons vecteurs des aires différentes, il y en a un seul qui reçoit la plus grande; et si l'on nomme L, M, N les sommes respectives des aires tracées sur trois plans rectangulaires quelconques, menés par le foyer, on aura pour la valeur G de l'aire qui est un *maximum*,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Et à l'égard du plan qui la reçoit, si l'on nomme λ, μ, ν les trois

Digitized by Google

angles respectifs qu'il forme avec les trois premiers, on aura pour les cosinus de ces angles,

$$\cos.\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos.\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos.\nu = \frac{N}{G};$$

ce qui détermine sur-le-champ la position de ce plan remarquable.

Lorsqu'on connaît l'aire *maximum* G, et le plan sur lequel elle tombe, on trouve facilement les aires que reçoivent les divers plans menés par le foyer. θ étant l'angle que forme un plan quelconque avec celui du *maximum* des aires, on a pour l'aire décrite sur ce nouveau plan, $G \cos.\theta$; d'où l'on voit que les aires sont égales sur tous les plans qui font le même angle avec celui du *maximum*, ou qui touchent un cône décrit sous le complément de cet angle autour de l'axe perpendiculaire à ce dernier plan; que de plus elles sont nulles quand l'angle θ est droit, c'est-à-dire, sur tous les plans perpendiculaires à celui du *maximum*.

Plan du *minimum maximorum* des aires.

Actuellement, parmi tous les plans qui donnent les aires *maxima*, relativement aux divers points de l'espace considérés comme foyers, il y en a un seul qui donne le *minimum* de ces *maxima*, ou l'aire *minimum maximorum*.

Ce plan est perpendiculaire à la direction de la résultante générale, ou du mouvement commun qui emporte le système. Son axe, c'est-à-dire, la perpendiculaire qui y serait élevée au foyer, se trouvera absolument de la même manière que l'axe central des momens, et le foyer pourra être pris par-tout où l'on voudra sur cette ligne. Pour tous les foyers qui en seraient aux mêmes distances dans un plan perpendiculaire, les aires *maxima* auront les mêmes valeurs, et leurs plans seront perpendiculaires aux diverses génératrices d'une hyperboloïde de révolution décrite autour de cet axe central. D'ailleurs, ces aires *maxima* et les inclinaisons de leurs plans varieront en vertu des distances précédentes, d'après les mêmes lois que nous avons données plus haut; et l'on trouvera sur les aires tous les théorèmes analogues à ceux qui ont été rapportés sur les momens.

Cette

Digitized by Google

Cette constance des aires décrites sur des plans qui restent immobiles au foyer, nous donne d'abord l'idée de les observer sur les plans auxquels nous rapportons les différens corps, afin qu'à toutes les époques du mouvement, nous puissions retrouver la position de ces plans, et reconnaître les changemens survenus dans le système. Mais, d'après ce que nous venons de dire, on voit qu'il y a un choix à faire entre ces plans coordonnés. Car si un plan qui reste immobile au foyer reçoit constamment la même aire de la part des rayons vecteurs, un plan qui recevrait constamment une même aire donnée, ne serait pas pour cela immobile, et pourrait se mouvoir d'une manière quelconque tangentiellement à un certain cône décrit autour du foyer. Donc si l'on avait rapporté primitivement tous les corps du système à un certain plan, et qu'on ne sût rien autre chose de ce plan, sinon qu'il recevait une aire donnée, on ne pourrait plus reconnaître actuellement sa position dans l'espace, parce qu'il a pu changer, ou, plus exactement, parce qu'il y en a une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété que lui.

Usage de ces plans, de ceux qu'il faut choisir pour y rapporter les corps du système.

Mais si l'on savait que le plan cherché était, entre tous ceux qui passent au même foyer, celui qui recevait l'aire la plus grande, on le retrouverait sur-le-champ, parce qu'il est unique, et jouit d'une propriété exclusive par rapport à tous les autres.

C'est donc ce plan qu'il faut choisir de préférence à tous ceux qui passent en un même point, pour y rapporter les différens corps du système; et sans connaître la grandeur de l'aire qui y est décrite, on pourra retrouver sa position dans tous les temps, pourvu qu'on connaisse le point fixe d'où partaient les rayons vecteurs, ou du moins quelqu'autre point fixe qui soit, avec le premier, dans la direction du mouvement général; car nous avons vu que pour ce nouveau foyer, le plan de l'aire *maximum* serait parallèle au premier.

Si l'on ne connaissait point la position de ce foyer, quand bien même on saurait que l'aire *maximum* décrite sur le plan cherché avait une valeur donnée, on ne pourrait pas encore distinguer ce plan d'une

Digitized by Google

infinité d'autres perpendiculaires aux génératrices d'une certaine hyperboloïde de révolution, parce que chacun de ces plans jouirait de la même propriété de recevoir une aire égale, et *maximum* entre celles des plans qui se croiseraient avec lui au même point.

Mais si l'on ajoutait que l'aire *maximum* dont il s'agit était le *minimum* des aires *maxima* relatives aux divers foyers de l'espace, on retrouverait sur-le-champ la position du plan cherché, parce qu'il jouit non-seulement d'une propriété exclusive par rapport à ceux qui passeraient au même foyer, mais encore d'une autre propriété exclusive par rapport à tous ceux qui auraient la première commune avec lui.

C'est donc ce nouveau plan qu'il faut choisir de préférence à tous ceux de l'espace; et l'on en pourra retrouver la position à toutes les époques, sans connaître ni la grandeur de l'aire qui y est décrite, ni le point qu'on a pris pour centre des rayons vecteurs. Mais, pour le déterminer, il faudra toujours avoir quelque point fixe d'où l'on puisse partir actuellement, et connaître en outre la grandeur et la direction de la résultante générale qui emporte le système dans l'espace.

Dans le cas des aires relatives, que l'aire *minimum maximorum* est la même que l'aire *maximum* autour d'un foyer quelconque.

Lorsqu'on ne connaît aucun point fixe auquel on puisse rapporter les rayons vecteurs, et qu'on partage les mouvemens des corps eux-mêmes que l'on considère, on ne peut plus observer que des aires décrites autour de foyers mobiles dans la direction du mouvement général. Or ces aires sont alors les mêmes que si le mouvement général était nul, ou que le centre de gravité du système fût en repos.

On a pu voir, en effet, par l'équation $G^2 = K^2 + R^2 p^2$, qu'un moment *maximum* G relatif à une certaine origine, se compose du moment *minimum maximorum* K et du moment Rp de la résultante générale par la distance de l'axe central à cette origine; de même l'aire *maximum*, par rapport à un foyer fixe, est la résultante de l'aire *minimum maximorum* et de l'aire qui serait décrite par le rayon vecteur de la masse entière du système, considérée comme réunie dans l'axe central, et animée, suivant cet axe, de la vîtesse commune. Si donc le foyer

Digitized by Google

que l'on considère, au lieu d'être fixe dans l'espace, se meut avec la vîtesse commune parallélement à l'axe central, cette partie des aires qui sont décrites en vertu du mouvement général, disparaît d'elle-même, et les aires observées sont parfaitement les mêmes que si la résultante générale était nulle, ou que le centre de gravité du système fût en repos dans l'espace.

Mais quand la résultante générale est nulle, les aires *maxima* sont égales pour tous les foyers de l'espace, et leurs plans sont parallèles. Donc alors le foyer de l'aire *minimum maximorum* peut être pris par-tout où l'on voudra.

Application au système du monde.

Ainsi, dans le système du monde, comme on ne connaît aucun point fixe auquel on puisse rapporter les différens corps célestes, et qu'on ignore d'ailleurs dans quel sens et avec quelle force ce système est entraîné dans l'espace, on ne peut déterminer ni le plan ni la valeur de l'aire *minimum maximorum*, et l'on doit choisir simplement le plan du *maximum* des aires, relativement à un point quelconque, qui se meuve en ligne droite avec la vîtesse commune du système. On peut donc prendre le foyer au centre de gravité, qui jouit de cette propriété dans tout le cours du mouvement, et c'est ce qu'a fait l'auteur de la *Mécanique céleste*, qui, le premier, a découvert ce plan invariable, et a déterminé sa position dans notre système planétaire.

Au reste, on peut encore prendre le foyer au centre de l'un quelconque des corps considéré comme fixe à chaque instant; c'est-à-dire, comme actuellement privé de sa vîtesse relative : ce point n'ayant plus alors que la vîtesse commune, sera dans le même cas que le centre de gravité; ainsi le plan de l'aire *maximum* relative à ce point sera parallèle au premier, et recevra la même aire.

Si donc pour considérer également tous les corps du système, on prend successivement les aires élémentaires décrites autour de chaque corps par tous les autres; en multipliant ces diverses sommes par les masses respectives des corps qui ont servi successivement de foyers, on trouvera, en les ajoutant, tous les produits des masses prises deux

Digitized by Google

à deux, multipliées par les aires qu'elles tracent dans le même temps, l'une autour de l'autre, considérée comme immobile.

Le plan dont nous avons parlé jouit donc encore de cette propriété remarquable, que la somme des produits précédens y est un *maximum*, aussi bien que sur tous ceux qui lui sont parallèles; et l'on voit que cette somme n'est autre chose que l'aire *maximum* relative au centre de gravité, multipliée par la masse entière du système. C'est ainsi que M. Laplace présente encore la théorie de ce plan *invariable*, en ramenant le principe des aires à des relations entre les distances mutuelles des différens corps du système.

Ce plan forme en quelque sorte l'immuable *équateur* du système du monde. Quels que soient les changemens que la suite des siècles amène entre les corps célestes, il demeurera toujours parallèle à lui-même: et, puisqu'on en peut retrouver la position dans tous les temps, comme on retrouve celle du centre de gravité; en y rapportant tous les corps du système, on aura toujours le moyen de comparer d'une manière précise les observations de l'astronomie, faites aux époques les plus éloignées.

Nous rappellerons encore ce corollaire remarquable de la théorie précédente, que, dans un système de molécules solides et fluides animées primitivement par des forces quelconques, et soumises à leur action mutuelle, s'il arrive qu'après un grand nombre d'oscillations, ces molécules se fixent à un état permanent de rotation autour d'un axe invariable passant par leur centre commun de gravité (et l'on peut conjecturer que ce cas est celui des corps célestes), alors leur équateur, ou le plan perpendiculaire à cet axe, sera parallèle à celui qui recevait, à l'origine du temps, le *maximum* des aires relativement au centre de gravité.

Mais nous n'étendrons pas plus loin ces dernières considérations, qui ont été approfondies et mises dans le plus grand jour par le géomètre que nous avons cité. Notre objet principal était de compléter la théorie des *momens* et des *aires*, et de faire passer dans les élémens les plus beaux théorèmes qu'on y eût trouvés jusqu'ici.

Digitized by Google

Nous finirons par observer, sur la loi des aires, que les plans ne sont pas les seules surfaces sur lesquelles elles se conservent sans altération pendant le mouvement du système. La même propriété appartient aussi à toute surface conique circulaire dont le sommet est placé au foyer des rayons vecteurs; mais il faut projeter ces rayons sur le cône par des lignes parallèles à son axe. Remarque nouvelle sur les aires.

Les aires décrites sur les surfaces de différens cônes de même axe et de même sommet, seront réciproquement proportionnelles aux sinus des angles sous lesquels ces cônes sont décrits; d'où l'on voit que le cône qui recevra l'aire la plus petite sera le cône décrit sous l'angle droit, autour de l'axe commun, c'est-à-dire, le plan perpendiculaire à cet axe.

Entre tous les cônes semblables de même sommet, mais d'axes différens, il y en aura un seul sur la surface duquel l'aire tracée par les rayons vecteurs sera un *maximum.*

Parmi tous ceux qui donneraient de même les aires *maxima* relativement aux divers foyers de l'espace, il y en aura un seul qui donnera le *minimum* de ces aires *maxima.*

Pour les axes de ces cônes remarquables, ils ne sont autre chose que les axes des momens ou des aires, qui jouissent de propriétés analogues, et ils se détermineront absolument de la même manière. Enfin l'on trouvera, en considérant les aires tracées sur des cônes quelconques semblables, tous les théorèmes que nous avons donnés par rapport aux aires qui sont tracées sur de simples plans.

Digitized by Google

THÉORIE GÉNÉRALE

De l'équilibre et du mouvement des Systèmes,

Par M. POINSOT.

LE principe des vîtesses virtuelles est devenu, comme on sait, la loi fondamentale de la mécanique. C'est sur cette loi que reposent aujourd'hui les meilleurs ouvrages que nous ayons dans la science, la *Mécanique* de M. *Lagrange*, où la grande fécondité du principe parut d'abord (*), et la *Mécanique céleste* de *M. Laplace;* deux productions du premier ordre, et qui mesurent, pour ainsi dire, la hauteur où les sciences exactes se sont élevées de nos jours.

L'importance du principe des vîtesses virtuelles étant si bien établie, plusieurs géomètres ont cru devoir en chercher immédiatement la démonstration.

Mais comme ce principe conduit à une méthode générale pour résoudre toutes les questions de l'équilibre et du mouvement, et que c'est en cette méthode même que réside au fond son principal avantage; au lieu de chercher directement la démonstration du principe des vîtesses

(*) Le principe des vîtesses virtuelles était connu depuis long-temps, aussi bien que la plupart des principes généraux de la mécanique; mais jusqu'à M. *Lagrange*, les géomètres s'étaient plus appliqués à les démontrer ou à les étendre, qu'à chercher une règle générale pour la solution des problèmes: ou plutôt ils ne s'étaient pas encore proposé ce grand problème, qui est à lui seul toute la mécanique. Ce fut alors une heureuse et belle idée de partir sur-le-champ du principe des vîtesses virtuelles, comme d'un axiome, et, sans s'arrêter davantage à le considérer en lui-même, de ne songer qu'à en tirer une méthode uniforme de calcul pour trouver les équations de l'équilibre et du mouvement dans tous les systèmes possibles. On franchit par-là toutes les difficultés de la mécanique : évitant, pour ainsi dire, de faire la science elle-même, on la transforma en une question de calcul; et cette transformation, l'objet et le résultat de la *Mécanique analytique*, fut peut-être l'exemple le plus frappant de la puissance de l'Analyse.

Digitized by Google

virtuelles, nous avons pensé qu'il serait plus naturel et peut-être plus facile de chercher et d'établir directement cette règle uniforme qu'il nous a fait connaître pour la solution des problèmes; et cette recherche, que son intérêt et sa généralité nous ont également invités à suivre, fait l'objet du mémoire que nous avons lu à l'Institut national *(nivôse an 13)*, et que nous allons reproduire ici sous une forme plus rigoureuse et plus simple.

I.

L'UN des premiers élémens de la théorie générale de l'équilibre est cet axiome, que, si des forces se font actuellement équilibre sur un système quelconque variable, l'équilibre ne cessera point en supposant que le système soit rendu tout-à-coup invariable, ou vienne, pour ainsi dire, à se solidifier lui-même.

Les conditions de l'équilibre des corps durs doivent donc se retrouver dans l'équilibre de tous les systèmes possibles, et c'est pour cela qu'on les a nommés les *propriétés générales* de l'équilibre.

On a présenté ces conditions de plusieurs manières; mais on peut remarquer qu'elles se réduisent à cette condition unique, que les forces appliquées aux divers points du système soient décomposables suivant les droites qui les joignent en forces deux à deux égales et contraires. C'est la possibilité de cette décomposition qui exige les six équations ordinaires de l'équilibre, comme on le verra tout à l'heure.

D'abord le théorème est évident pour l'équilibre de deux forces; il faut que ces deux forces soient parfaitement égales et contraires.

Il est bien aisé d'en conclure que, pour trois forces, si l'on joint leurs points d'application par trois lignes droites, il faut nécessairement qu'elles soient décomposables en forces deux à deux égales et contraires dans ces trois lignes.

Actuellement, si l'on a un nombre quelconque de forces, que l'on prenne trois quelconques de leurs points d'application, les trois lignes

Digitized by Google

qui les joignent, et toutes celles qui, partant des autres points, viendraient aboutir à ceux-là, on pourra se représenter ces trois premiers points comme les angles de la commune base de plusieurs pyramides triangulaires dont les autres points seraient les sommets.

Cela posé, on peut toujours commencer par décomposer les forces appliquées à ces sommets, chacune en trois autres suivant les trois arêtes qui y aboutissent.

Ensuite, on est le maître de décomposer les trois forces qui sont aux coins de la commune base, en forces qui soient égales et contraires aux premières, et en d'autres. Si l'on supprime les forces égales et contraires dans les arêtes, il ne reste plus que trois forces appliquées aux trois angles de la base. Mais puisqu'il y a équilibre, ces forces restantes doivent être décomposables suivant les trois côtés de cette base, en forces deux à deux égales et contraires.

Donc toutes les forces étaient décomposables suivant les droites qui joignent leurs points d'application en forces deux à deux égales et contraires dans chacune d'elles; et cette décomposition est déterminée lorsqu'elle ne se fait, comme on le suppose ici, que par $3h - 6$ distances mutuelles, h étant le nombre total des points du système.

Lorsqu'on veut faire entrer dans le calcul, non-seulement les quantités des forces appliquées, mais encore leurs inclinaisons mutuelles, on se donne, au lieu de chaque force, ses trois composantes parallèles à trois axes connus. Alors, pour exprimer qu'en chaque point chaque force est décomposée en d'autres suivant les arêtes qui y aboutissent, il faut trois équations où ces dernières composantes sont les inconnues. Il faudrait donc en tout $3h$ équations pour les h points du système. Mais si l'on veut que les composantes soient deux à deux égales et contraires dans les $3h - 6$ arêtes, elles ne formeront que $3h - 6$ inconnues. Donc, en les éliminant, il restera entre les forces données, six équations de condition, pour que leur décomposition en forces égales et contraires soit possible, et par conséquent pour qu'il y ait équilibre. Ce sont les six équations connues; nous les avons données ailleurs

Digitized by Google

ailleurs par une autre métaphysique qui a ses avantages; mais j'ai été bien aise d'en indiquer, en passant, cette démonstration nouvelle, parce qu'on y voit mieux encore ce qu'elles signifient, et qu'ici, ces équations ne sont pas obtenues séparément et par des considérations différentes, mais s'offrent à-la-fois toutes six comme l'expression d'une seule et unique condition, qui est *la possibilité que les forces appliquées se décomposent en d'autres égales et contraires suivant les distances mutuelles des différens points.*

Cette décomposition est donc nécessaire dans l'équilibre de tous les systèmes possibles; et, quand les distances mutuelles des points du système sont toutes invariables, elle suffit, de quelque façon qu'elle s'opère d'ailleurs; je veux dire, quelle que soit la proportion des composantes dans les distances mutuelles successives.

Mais lorsqu'aucune de ces droites n'étant seule invariable, c'est simplement une fonction de leurs longueurs qui doit demeurer constante; alors la décomposition précédente, qui est toujours nécessaire, ne suffit plus pour assurer l'équilibre du système; il faut encore qu'il règne d'une droite à l'autre, entre les valeurs des forces égales et contraires, une certaine proportion qui dépend de la nature de la fonction proposée. Or c'est précisément cette proportion qu'il s'agit de découvrir ici; et c'est dans la manière générale de la déduire de la fonction proposée, que consiste la loi fondamentale de l'équilibre des systèmes.

II.

D'un système de points liés par une seule équation quelconque entre leurs distances mutuelles.

Ne considérons d'abord que quatre points et leurs distances mutuelles m, n, p, q, r, s, qui sont comme les arêtes d'une pyramide triangulaire dont ces points seraient les angles.

Représentons par $f(m, n, p, q, r, s) = L = const.$ la fonction quelconque de ces distances qui doit demeurer constante, en sorte qu'on ait

Digitized by Google

toujours cette équation, dans quelques positions respectives que puissent rouler les divers points du système.

Cela posé, soient, s'il est possible, quatre forces qui tiennent ces quatre points en équilibre. Si on les conçoit décomposées, chacune en trois autres suivant les trois arêtes contiguës, il résulte de ce qu'on vient de dire, que les deux composantes qu'on trouvera dans chaque arête seront nécessairement égales et contraires; sans quoi il n'y aurait point équilibre, même en supposant toutes ces arêtes devenues roides.

Il ne reste donc qu'à trouver la proportion des composantes autour de chaque sommet de la pyramide.

Pour cela, je suppose que trois quelconques des points deviennent parfaitement fixes dans l'espace. L'équilibre n'est pas troublé. Mais, à cause de l'équation proposée, le quatrième n'a plus que la liberté de se mouvoir sur une certaine surface courbe, et il a entièrement cette liberté: donc il est nécessaire que la force unique qui le presse soit actuellement perpendiculaire à cette surface (*).

Or, m, n, p étant les trois arêtes qui se terminent au point que l'on considère, la surface qu'il a la liberté de décrire quand les trois autres deviennent fixes, est donnée par l'équation,

$$f(m, n, p, q, r, s) = const.$$

lorsqu'on y regarde m, n, p comme seules variables.

La normale à cette surface se trouve donc en prenant les trois fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, de la fonction proposée relativement aux trois lignes m, n, p; portant sur ces lignes trois longueurs respectives proportionnelles à ces fonctions *primes*, et achevant sur elles le parallélipipède, la diagonale donne la direction de la normale, comme cela se voit par la géométrie.

Donc, puisque la force appliquée au point que l'on considère doit agir suivant cette direction, ses trois composantes suivant les arêtes m, n, p,

(*) *Voyez*, sur ce principe, la note I.

Digitized by Google

sont nécessairement proportionnelles aux trois fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(r)$, $f'(p)$.

On verrait de même qu'au point où se terminent les trois arêtes m, q, r, les trois composantes de la force qui le sollicite sont proportionnelles aux trois fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(q)$, $f'(r)$, et ainsi de suite.

Donc les forces égales et contraires dans les six arêtes m, n, p, q, r, s sont toutes proportionnelles aux six fonctions *primes*

$$f'(m),\ f'(n),\ f'(p),\ f'(q),\ f'(r),\ f'(s).$$

Donc il est démontré, en toute rigueur, que si quatre corps ou points sont liés entre eux par la condition qu'une fonction quelconque de leurs distances mutuelles demeure constante, ces corps ne peuvent être en équilibre, à moins qu'ils ne soient sollicités les uns vers les autres, suivant leurs distances mutuelles, par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée relativement à ces distances : ou, ce qui est la même chose, à moins qu'ils ne soient sollicités par quatre forces qui puissent se décomposer en celles-là; et, comme cette condition détermine entièrement les forces, il s'ensuit que de telles forces se feront réellement équilibre, ou l'équilibre n'est pas possible sur le système.

On a considéré sous la fonction les six distances mutuelles m, n, p, q, r, s des quatre corps; mais le raisonnement serait le même si cette fonction ne renfermait qu'une partie quelconque de ces distances : seulement on trouverait que les forces sont nulles le long des distances qui n'entrent pas dans la fonction.

Par exemple, que, des trois distances m, n, p du premier point aux trois autres, il n'entre que les deux premières m et n dans la fonction proposée; alors la surface que ce point peut décrire, quand les autres sont fixement arrêtés, est donnée par l'équation $f(m, n, q, \&c.) = const.$, en y regardant m et n comme seules variables. C'est une surface de révolution autour de la ligne qui joint les deux corps d'où partent les deux rayons vecteurs m et n. La normale à cette surface est donc simplement la diagonale d'un parallélogramme construit sur deux droites proportionnelles à

Digitized by Google

$f'(m), f'(n)$ dont on aurait prolongé ces rayons vecteurs. La force qui doit agir suivant cette normale se décompose donc entièrement, suivant les distances m et n, en deux autres proportionnelles à $f'(m), f'(n)$, et ne donne point de composante suivant la distance p qui n'entre point dans la fonction.

Si, des trois distances m, n, p du premier point aux autres, il n'y en avait qu'une seule m sous la fonction, la surface qu'il pourrait décrire quand les autres sont fixes, serait donnée par l'équation $f(m, q, r, \&c.) = const.$, en y regardant m comme seule variable, ce qui équivaut à $m = constante$: c'est alors une sphère dont la ligne m est le rayon, et par conséquent la normale. La force qui doit agir suivant cette ligne y reste donc toute entière, et ses deux composantes sont nulles, suivant les distances n et p; d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir aucune action entre les corps, suivant leurs distances mutuelles, que la fonction ne renferme pas.

Soient actuellement tant de points que l'on voudra, et

$$f(m, n, p, q, r, \&c.) = L = const.$$

une équation quelconque entre leurs distances mutuelles m, n, p, q, r, &c.; et, s'il y a dans cette équation plus de $3h - 6$ distances mutuelles, h étant le nombre des points, qu'on élimine ces lignes superflues, ou qu'on les suppose éliminées au moyen des équations de condition qui ont lieu entre des droites qui joignent des points deux à deux dans l'espace; on pourra se représenter, comme ci-dessus, toutes ces distances mutuelles comme les arêtes de pyramides triangulaires successives qui s'appuieraient toutes sur une même base.

Cela posé, soit le système tenu en équilibre par des forces respectivement appliquées à ses différens points.

D'abord toutes ces forces doivent être décomposables suivant les lignes m, n, p, q, r, &c., en forces deux à deux égales et contraires, sans quoi il ne pourrait pas y avoir équilibre, comme on l'a démontré plus haut.

Cette décomposition supposée faite (et elle aura lieu ici d'une manière déterminée), il ne s'agit plus, pour connaître les forces, que de trouver la proportion nécessaire de leurs composantes. Or je dis qu'elles

Digitized by Google

sont entre elles comme les fonctions *primes* de la fonction proposée relativement aux lignes m, n, p, q, r, &c. où elles sont dirigées.

En effet, considérons à part quatre points qui forment les angles de l'une de nos pyramides, et supposons pour un moment que, leurs distances mutuelles restant seules variables dans l'équation, toutes les autres y deviennent constantes; il est clair que le jeu de ces quatre corps devient le même que s'ils étaient restés seuls dans l'espace, mais liés entre eux par l'équation proposée, où l'on regarderait leurs seules distances mutuelles comme variables, et toutes les autres lignes comme de simples nombres donnés. Cela résulte de la supposition même, et se voit très-bien aussi dans la figure, en se représentant les six arêtes de notre pyramide restées seules variables. D'abord, le point qui fait le sommet de cette pyramide ne tiendra point aux autres arêtes devenues invariables; et pour les trois points à la base, ils ne seront pas plus gênés par ces arêtes, qui viennent sur eux trois à trois des autres points du système, que si elles n'y étaient réellement pas. Car, bien que ces lignes soient devenues isolément roides, comme on les suppose restées mobiles autour de leurs points d'intersection, qui eux-mêmes sont mobiles dans l'espace, il est visible qu'elles se prêteront d'elles-mêmes aux mouvemens des trois points où elles aboutissent, et ne feront que les suivre, sans les gêner, dans toutes les figures et dans toutes les positions où ils voudraient passer quand on fait varier leurs seules distances mutuelles dans l'équation proposée.

Donc, en vertu de ce qui a été démontré, il faudrait pour l'équilibre particulier de nos quatre points, qu'ils fussent sollicités les uns vers les autres par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée, prises relativement à leurs distances mutuelles.

Mais il est clair que cette proportion doit se retrouver absolument la même dans l'équilibre général du système; car si l'équilibre est supposé y exister, il y subsiste toujours en supposant telles arêtes que l'on voudra devenues roides, et supprimant alors toutes les forces égales et contraires qui se détruiraient d'elles-mêmes dans ces arêtes.

Digitized by Google

Les forces restantes appliquées au système partiel le long des arêtes ou distances mutuelles restées variables, doivent donc suivre nécessairement la loi de l'équilibre de ce système.

Donc, au moment de l'équilibre général, on est sûr que les composantes contraires qui agissent suivant les arêtes de l'une quelconque de nos pyramides, sont proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée relativement à ces lignes. Donc, à cause des arêtes communes aux pyramides successives, cette proportion s'étend d'une arête à l'autre dans toute l'étendue de la figure, et tous les corps sont nécessairement sollicités les uns vers les autres, suivant leurs distances mutuelles $m, n, p, q, r,$ &c., qui entrent dans la fonction, par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* $f'(m)$; $f'(n), f'(p), f'(q), f'(r)$, &c., de cette fonction, relativement à ces distances $m, n, p, q, r,$ &c.; *ce qu'il fallait démontrer.*

Si donc, aux différens points du système, on prolonge les lignes $m, n, p, q, r,$ &c., de longueurs quelconques toutes proportionnelles aux fonctions *primes* $f'(m), f'(n), f'(p), f'(q), f'(r),$ &c., qui se rapportent à ces lignes, ces longueurs représenteront les composantes des forces qui doivent être appliquées à ces points respectifs; de sorte qu'en les réduisant en chaque point à une seule, on aura la force unique qui doit y être appliquée pour l'équilibre du système.

La manière la plus simple de trouver l'expression de ces forces, est de chercher, pour chacune d'elles, ses trois composantes parallèles à trois axes rectangulaires dans l'espace.

Soient x, y, z les trois coordonnées du premier point par rapport à ces axes; $m, n, p,$ &c., ses distances aux autres points dont les coordonnées soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''', &c., on aura :

$$m = \sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]},$$
$$n = \sqrt{[(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2]},$$
$$p = \sqrt{[(x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2]},$$
&c.

Digitized by Google

et les fonctions *primes* de ces expressions, prises par rapport à x, et que nous représenterons par $\frac{dm}{dx}$, $\frac{dn}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, &c., seront les cosinus des angles que les droites m, n, p, &c., font avec l'axe des x.

Les forces $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, &c., appliquées au point que l'on considère, suivant ces droites, donneront donc parallèlement à l'axe des x, les composantes respectives

$$f'(m)\frac{dm}{dx},\ f'(n)\frac{dn}{dx},\ f'(p)\frac{dp}{dx},\ \&c.,$$

lesquelles se réduiront à une seule, égale à leur somme,

$$f'(m)\frac{dm}{dx}+f'(n)\frac{dn}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}+\&c.;$$

mais cette expression n'est autre chose que la fonction *prime* de la fonction proposée, $f(m, n, p, q, r, \&c.)$, ou L, prise relativement à x, et que nous représenterons simplement par $\left(\frac{dL}{dx}\right)$.

Ainsi, la force appliquée au premier point aura sa composante, suivant l'axe des x, représentée par $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, c'est-à-dire, par la fonction *prime* de la fonction donnée relativement à la coordonnée du point le long de cet axe.

On aura de même pour les deux autres composantes, suivant les axes des y, z, les expressions $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$; de sorte que la force elle-même sera représentée par

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}.$$

Si l'on considère la surface courbe représentée par l'équation $L=const.$, quand on y regarde x, y, z comme seules variables, on voit que $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$ sont proportionnelles aux cosinus des trois angles que fait, avec les axes, la normale à cette surface.

La force $\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}$ est donc dirigée perpendiculairement à la surface courbe que le point où elle agit pourrait

Digitized by Google

décrire si tous les autres devenaient fixes, ce qui doit être, et ce qu'on pouvait supposer *à priori*, comme dans le cas du système de quatre points, où l'on est parti de cette vérité comme principe.

Donc, en appliquant ce qu'on vient de dire aux différens points du système, les forces qui les sollicitent sont toutes proportionnelles aux fonctions,

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy''}\right)^2\right]},$$

&c.

et chacune d'elles est normale à la surface courbe que son point d'application pourrait décrire, en vertu de l'équation $L = const.$, si l'on supposait tous les autres fixement arrêtés.

Cette démonstration nous paraît nette et rigoureuse; elle est même dégagée de cette espèce d'axiome que, dans les systèmes, les points ne peuvent agir les uns sur les autres que suivant les droites qui les joignent. En effet, pour obtenir les forces totales qui devaient être appliquées aux points respectifs du système, nous avons bien été maîtres d'imaginer chacune d'elles décomposée en d'autres, suivant les lignes que nous avons voulu choisir, et qui, pour chaque point, sont au nombre de trois au moins; et puisque nous avons trouvé la proportion nécessaire de toutes ces composantes, il s'ensuit que nous avons trouvé les vraies forces de l'équilibre, et que cet équilibre est unique.

Cependant, voici une difficulté apparente qu'il n'est peut-être pas inutile de proposer et de résoudre, parce que sa solution très-simple met le théorème dans un nouveau jour.

Quand le système n'est composé que de quatre points, il faut nécessairement leurs six distances mutuelles pour déterminer la pyramide dont ils sont les angles; et par conséquent il n'y a aucune équation de *condition*, c'est-à-dire, qui existe d'elle-même entre ces distances.

Mais lorsque le nombre des points est supérieur à quatre, il y a plus de distances

Digitized by Google

distances mutuelles qu'il n'en faut pour assurer la figure du système; et l'on a, entre toutes les distances, autant d'équations de condition que de lignes superflues. On peut donc alors éliminer de la fonction proposée $f(m, n, p, q, r, \&c.)$, ou y introduire telles de ces lignes qu'on voudra, et que toutefois la combinaison de ces équations pourra permettre. Ainsi, l'on pourra varier les distances qui entrent sous cette fonction, et la forme de cette fonction de plusieurs manières.

Or, suivant qu'on voudra présenter cette fonction entre telles ou telles distances mutuelles, on trouvera telles ou telles forces, suivant ces distances; d'où il paraît que les forces totales qui en résulteraient à chaque point, pourraient bien n'être pas les mêmes dans ces différens cas, quoiqu'au fond la liaison des points n'ait pas été changée, et que le cas de l'équilibre soit unique.

Pour détruire sur-le-champ cette difficulté, j'observe que si une fonction des distances mutuelles de plusieurs points peut quelquefois être écrite de plusieurs façons, selon les distances que l'on y veut choisir, cette fonction néanmoins reste toujours identique, si on la regarde comme une fonction des coordonnées de tous les points. En effet, les équations de condition qui ont lieu entre les distances mutuelles $m, n, p, q, r, \&c.$, ne sont autre chose que des identités, lorsqu'on vient à y substituer, au lieu de ces droites, leurs expressions par les coordonnées $x, y, z; x', y', z', \&c.$, des différens points qu'elles unissent. Ainsi, quoiqu'au moyen de ces équations, la fonction proposée L puisse être changée en $m, n, p, q, r, \&c.$, elle demeure toujours la même en $x, y, z; x', y', z', \&c, \&c.$: les expressions $\left(\frac{dL}{dx}\right), \left(\frac{dL}{dy}\right), \left(\frac{dL}{dz}\right); \left(\frac{dL}{dx'}\right), \left(\frac{dL}{dy'}\right), \left(\frac{dL}{dz'}\right)$, &c., sont donc aussi toujours les mêmes. Or, comme on sera toujours conduit à ces expressions pour les forces de l'équilibre, de quelque manière permise que la même fonction L ait été écrite en $m, n, p, q, r, \&c.$, il s'ensuit qu'on parviendra toujours aux mêmes forces pour l'équilibre du système, comme cela doit être.

Ceci nous fait voir encore que si la fonction proposée $f(m, n, p, q, r, \&c.) = L$,

Digitized by Google

est présentée entre plus de lignes $m, n, p, q, r,$ &c. qu'il n'en faut pour la figure, il sera inutile d'éliminer les autres, comme on l'a supposé fait, au commencement, pour la clarté de la démonstration. Les fonctions *primes* $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$; $\left(\frac{dL}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy'}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz'}\right)$, &c. qu'on en tirerait pour l'expression des forces de l'équilibre, seraient identiquement les mêmes que si l'on n'avait pas fait l'élimination; et par conséquent on les obtiendra tout de suite, sans rien changer à la forme sous laquelle la fonction est donnée.

A l'égard des *actions réciproques* des différens points, si l'on sait que, dans le système dont on s'occupe, il ne peut y avoir de communication directe entre les h points que par leurs $3h - 6$ distances mutuelles qui entrent sous la fonction, on conclura de ce qui a été démontré, que ces points agiront réellement les uns sur les autres, suivant ces distances $m, n, p, q, r,$ &c., en raison des fonctions *primes* $f'(m), f'(n), f'(p), f'(q), f'(r),$ &c.

Mais de même que la fonction proposée peut être présentée indifféremment entre telles ou telles distances mutuelles, de même la communication des points peut être établie suivant telles ou telles de ces lignes, sans que la liaison générale de ces points soit changée. Si donc on ignore de quelle manière le système est exécuté, on ne pourra pas dire, d'après la seule fonction $f(m, n, p, q,$ &c.$)$, quelles sont les réactions véritables des différens points, parce qu'on ne saura pas si les liens qui pourraient donner lieu à ces actions directes, sont établis précisément le long des distances mutuelles $m, n, p, q, r,$ &c., qui paraissent dans la fonction. Ainsi cette fonction, qui, sous quelque forme qu'elle soit donnée, caractérise le système, et suffit pour faire connaître sur-le-champ les forces uniques,

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}, \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]}, \text{ \&c.}$$

qui doivent être appliquées aux différens points, ne suffit pas pour apprendre comment ces forces se distribuent réellement des uns aux

Digitized by Google

autres : il faut encore regarder la construction du système lui-même, et voir suivant quelles distances mutuelles la communication est réellement établie. S'il arrive qu'elle se fasse précisément par les mêmes distances que celles qui sont dans la fonction donnée, on prendra sur-le-champ les fonctions *primes* relatives à ces distances, et l'on aura les réactions véritables des différens points. Mais si la communication s'opère par d'autres lignes, il faudra commencer par éliminer de la fonction toutes les distances mutuelles le long desquelles il n'y a pas de lien immédiat dans la construction du système (ce qui pourra toujours se faire au moyen des équations de condition entre ces droites), et les fonctions *primes* de cette fonction nouvelle par rapport aux distances mutuelles qui y restent, seront les expressions des actions réciproques qui auront véritablement lieu entre les corps.

Tel est l'esprit de cette loi fondamentale, qui contient toute la science des forces. Avant d'aller plus loin, il me paraît à propos d'en faire quelques applications simples, où l'on voie à-la-fois la rapidité des solutions et l'identité de la théorie avec les premiers principes de l'équilibre.

Considérons d'abord trois points liés entre eux par la condition que la somme de leurs distances mutuelles m, n, p, doive demeurer constante.

La fonction $f(m, n, p)$ sera donc ici $m + n + p$; en prenant les fonctions *primes*, on aura

$$f'(m) = 1, f'(n) = 1, f'(p) = 1.$$

Ce qui nous apprend que chacun des trois points doit être sollicité vers les deux autres par des forces égales; que par conséquent les trois forces uniques P, Q, R, qui les animeraient, sont représentées en grandeurs et en directions par les diagonales de trois losanges construits avec les mêmes côtés sous les trois angles du triangle.

C'est la loi de l'équilibre de trois points où passeraient, comme dans des anneaux, un même fil inextensible le long duquel ils pourraient couler librement. Quand ces points se meuvent de manière que le fil

Digitized by Google

reste tendu, la somme de leurs distances mutuelles demeure constante, conformément à l'équation $m + n + p = const.$, et chacun d'eux lorsqu'on le suppose seul mobile, n'a plus que la liberté de se mouvoir sur une ellipsoïde de révolution dont les deux autres sont les foyers. C'est pour cela que chacune des forces appliquées divise en deux parties égales l'angle formé par les distances de son point d'application aux deux autres; car cette force doit être normale à l'ellipsoïde dont il s'agit, et dans cette surface la normale divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs.

On peut remarquer que le fil inextensible ne représente pas complétement la liaison que l'équation suppose; car ce fil fait simplement que la somme des distances des points ne peut pas devenir plus grande, mais il ne l'empêche pas de devenir moindre. Ainsi, pour l'équilibre des trois corps unis par le fil, il faut encore ajouter que les forces doivent agir de manière à ce que le fil soit tendu; au lieu que dans l'équilibre du système défini par l'équation $m + n + p = const.$ elles peuvent agir indifféremment, ou pour tendre le fil, ou pour le comprimer; de sorte que l'espèce de fil flexible que le calcul suppose, est tout à-la-fois inextensible et incompressible.

Si c'était simplement la somme des distances m et n des deux premiers corps au troisième, qui dût demeurer constante, on aurait

$$f(m, n) = m + n = const.,$$

d'où $f'(m) = f'(n) = 1$. Ainsi, il faudrait appliquer aux deux premiers corps deux forces égales, suivant leurs distances m et n, au troisième, et à celui-ci une force égale et contraire à leur résultante; et il n'y aurait point de force suivant la distance p, qui n'entre pas sous la fonction.

C'est en effet le cas de trois corps, dont l'un pourrait couler comme un anneau le long du fil, tandis que les deux autres seraient fixement attachés à ses deux bouts. Quand les deux corps extrêmes sont supposés fixés, celui du milieu n'a plus que la liberté de décrire une ellipsoïde de

Digitized by Google

révolution autour d'eux, comme foyers ; mais ceux-ci décrivent simplement des sphères autour de lui, comme centre, quand ils sont regardés, l'un après l'autre, comme seuls mobiles. Voilà pourquoi la force appliquée au corps qui peut glisser le long du fil, divise en deux également l'angle formé par les deux portions de ce fil, tandis que chacune des deux autres forces agit vers le corps du milieu, dans la direction du fil lui-même.

S'il y avait plus de trois corps unis entre eux par un même fil, le long duquel ils pussent couler librement, en nommant m, n, p, q, r, &c., les portions successives de ce fil, on aurait

$$f(m, n, p, q, r, \&c.) = m + n + p + q + r + \&c. = const.;$$

et par conséquent $f'(m) = f'(n) = f'(p) = f'(q) = f'(r) = \&c. = 1$, comme ci-dessus : d'où l'on voit que le fil doit être également tendu dans toute sa longueur; que chacune des forces divise en deux parties égales l'angle du polygone funiculaire où elle est appliquée, et qu'elles sont toutes proportionnelles aux cosinus des moitiés de ces angles, &c.

Supposons actuellement que nos trois corps soient tellement liés, que la somme des carrés de leurs distances mutuelles reste constante.

La fonction $f(m, n, p)$ sera ici $m^2 + n^2 + p^2$; et l'on aura

$$f'(m) = 2m, f'(n) = 2n, f'(p) = 2p.$$

Il faudra donc, pour l'équilibre, que chaque corps soit sollicité vers les deux autres par des forces proportionnelles à ses distances à ces deux corps ; d'où il est facile de voir que les trois forces uniques P, Q, R, qui agiraient sur ces points respectifs, sont dirigées vers leur centre de gravité, en les supposant de masses égales, et sont proportionnelles à leurs distances à ce centre.

C'est en effet ce qui résulterait du plus simple raisonnement; car en vertu de l'équation $m^2 + n^2 + p^2 = const.$, si l'on suppose deux des points devenus fixes, le troisième n'a plus que la liberté de décrire une sphère dont le centre est au milieu de la droite qui joint les deux autres : or la force qui le sollicite, dans le cas de l'équilibre, doit être normale à cette surface, et par conséquent les trois forces doivent être

Digitized by Google

dirigées des trois angles du triangle vers les milieux des côtés opposés, et se croiser ainsi au centre de gravité de ce triangle ; il est clair ensuite qu'elles sont entre elles comme les distances des angles à ce point.

Mais ici on ne peut plus construire le système, comme on l'a fait dans l'exemple précédent; il faudrait un fil d'une espèce particulière, où les corps pussent rouler de manière que la somme des carrés de leurs distances fût toujours la même, et nous ne connaissons pas de fil qui ait cette propriété. Mais de quelque façon qu'un pareil système puisse être exécuté, qu'il soit même possible ou non, peu importe à la théorie; notre objet n'est pas de le faire, mais de trouver les forces d'équilibre qui résultent nécessairement de sa définition, et le problème est résolu dans toute sa pureté.

Que si l'on avait un plus grand nombre de corps liés de manière que la somme des carrés de toutes leurs distances mutuelles dût demeurer constante, on verrait de même que, pour l'équilibre, tous ces corps doivent être sollicités les uns vers les autres proportionnellement à leurs distances; de sorte que les forces totales qui les animent respectivement sont dirigées vers le centre de gravité de tous ces points, considérés comme égaux en masse, et sont proportionnelles aux distances de ces points à ce centre commun.

Si la fonction des distances mutuelles était $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+$ &c. en prenant les fonctions *primes*, on aurait

$$f'(m)=-\frac{1}{m^2}, f'(n)=-\frac{1}{n^2}, f'(p)=-\frac{1}{p^2}, f'(r)=-\frac{1}{r^2}, \text{ \&c.}$$

et tous les corps, dans le cas de l'équilibre, devraient être sollicités les uns vers les autres en raison inverse des carrés de leurs distances mutuelles, &c.

On pourrait multiplier les exemples; mais ceux-ci suffisent, et je reviens à la question générale.

Digitized by Google

III.

D'un Système où les points sont liés par plusieurs équations quelconques entre leurs distances mutuelles.

SUPPOSONS actuellement que les points du système soient tellement liés, qu'on ait toujours entre leurs distances mutuelles les équations suivantes:

$$f(m, n, p, q, r, \&c.) = L = const.$$
$$\Phi(m, n, p, q, r, \&c,) = M = const.$$
$$\downarrow(m, n, p, q, r, \&c.) = N = const.$$
$$\&c.$$

de sorte que le système puisse affecter toutes les figures où ces équations subsistent, et n'en puisse affecter aucune où elles cesseraient d'avoir lieu.

Premièrement, par cela seul que les points du système sont liés entre eux par la première équation $L = const.$, on peut leur appliquer les forces respectives

$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]},$$
$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]},$$
$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]},$$
$$\&c.$$

λ désignant un coëfficient quelconque indéterminé, et chaque force étant normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les trois coordonnées du point d'application comme seules variables; et l'on est sûr que ces forces se feront équilibre sur le système.

En second lieu, parce que les points sont liés entre eux par la seconde équation $M = const.$, on peut leur appliquer encore les forces respectives

$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2\right]},$$
$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz'}\right)^2\right]},$$
$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz''}\right)^2\right]},$$
$$\&c.$$

Digitized by Google

μ étant un nouveau coèfficient indéterminé; et chacune de ces forces étant normale à la surface représentée par l'équation $M = const.$, lorsqu'on y regarde les coordonnées du point d'application comme seules variables.

De même, en désignant par ν un coèfficient indéterminé comme les précédens, on peut encore appliquer aux points du système les forces respectives

$$\nu\sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right]},$$
$$\nu\sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz'}\right)^2\right]},$$
$$\nu\sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz''}\right)^2\right]},$$
&c.

dirigées suivant les normales aux surfaces respectives représentées par l'équation $N = const.$, lorsqu'on y regarde successivement, &c.

Et ainsi de suite pour les autres équations qui lient les points du système.

Il est bien manifeste qu'il y aura équilibre en vertu de toutes ces forces, puisqu'il y aurait équilibre en particulier dans chaque groupe relatif à chaque équation.

Mais on pourrait demander si ces forces, ou leurs résultantes aux différens points, sont les seules qui puissent se faire équilibre sur le système; si, par la simultanéité des équations $L = const.$, $M = const.$, $N = const.$, &c., les points ne pourraient pas devenir capables d'autres résistances que des résistances composées de celles qui naîtraient successivement de ces équations, si elles avaient lieu l'une après l'autre.

Pour répondre à cette question, j'observe qu'au moment de l'équilibre du système, chaque équation peut être regardée comme tenant lieu de certaines forces; car, si l'on venait à supprimer tout-à-coup cette équation, l'équilibre serait rompu; mais il est clair qu'il y aurait de certaines forces propres à empêcher cette rupture, et qui remplaceraient parfaitement l'équation absente. Si donc on imagine que toutes les

Digitized by Google

les équations, hors la première, soient actuellement remplacées par des forces convenables, les points ne se trouvant plus liés entre eux que par la seule équation $L = const.$, il est nécessaire que toutes les forces actuelles qui les sollicitent, se réduisent aux forces :

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]},$$

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]},$$

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]}, \text{ \&c.}$$

D'où l'on voit que cette équation, dans l'équilibre du système, ne peut tenir lieu que des mêmes forces dont elle pourrait tenir lieu si elle était seule. Ainsi, les forces qui peuvent se faire équilibre sur le système défini par plusieurs équations, ne sont autre chose que les résultantes de celles qui s'y feraient équilibre séparément en vertu de chaque équation.

Lorsque les points du système ne sont liés que par une seule équation, le cas de l'équilibre est unique; je veux dire qu'il n'y a, pour chaque figure où peut passer le système, que des forces de directions et de proportion déterminées qui puissent s'y faire équilibre. Mais lorsqu'il y a deux équations, $L = const.$, $M = const.$, l'équilibre n'est plus unique, et il y a pour une même figure une infinité de groupes de forces qui peuvent se faire équilibre sur le système. En effet, au moyen des deux indéterminées λ et μ qui affectent les deux composantes

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}, \mu \sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz}\right)^2\right]}$$

de chaque force, on peut varier les directions et la proportion de ces forces d'une infinité de manières; seulement il faut observer que chacune d'elles ne sortira pas d'un plan déterminé : car la première composante est normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les coordonnées du point comme seules variables; la

Digitized by Google

seconde est normale à la surface représentée par l'équation $M = const.$, lorsqu'on y regarde les mêmes coordonnées comme seules variables. La résultante est donc située dans le plan perpendiculaire à l'intersection de ces deux surfaces. C'est, en effet, ce qui doit avoir lieu; car si l'on vient à fixer tous les points du système, hors celui dont il s'agit, il n'aura plus que la liberté de se mouvoir le long de cette intersection, comme dans un canal infiniment étroit : or l'équilibre n'étant point troublé par l'hypothèse, il faut nécessairement que la force appliquée soit actuellement perpendiculaire à la direction de ce canal.

Quand il y a plus de deux équations qui lient les points du système, l'indétermination du cas de l'équilibre est encore plus étendue; et pour les points dont les coordonnées se trouvent à-la-fois dans trois équations, les forces appliquées peuvent avoir des directions quelconques. Les trois indéterminées λ, μ, ν qui affectent alors les trois composantes de chaque force, peuvent donner à cette force une direction arbitraire dans l'espace. C'est ce qui s'accorde encore avec notre principe; car si l'on suppose devenus fixes tous les points hors celui que je considère, comme ses coordonnées entrent à-la-fois dans trois des équations, ce point ne conserve plus aucune liberté dans l'espace, ainsi la force qui le sollicite n'est obligée à aucune direction déterminée (*).

IV.

D'un système où les points sont liés par des équations quelconques entre leurs coordonnées.

JUSQU'ICI nous n'avons considéré qu'un système entièrement libre, c'est-à-dire, dont les points ne se trouvent liés que par des équations entre leurs distances mutuelles; mais il est bien facile d'étendre la loi

(*) Au reste, il faut bien entendre ceci : les directions des forces ne sont pas toutes indéterminées; s'il n'y avait, par exemple, que trois équations, une fois que l'on aurait disposé de λ, μ, ν, pour donner à l'une des forces une direction arbitraire, les directions et la proportion des autres seraient nécessairement déterminées.

Digitized by Google

que nous avons trouvée à un système où les points seraient liés par des équations entre leurs coordonnées relatives à trois axes fixes dans l'espace. Ce n'est pas que les fonctions L, M, N, &c. des distances mutuelles m, n, p, q, &c. ne puissent être regardées comme fonctions des coordonnées $x, y, z; x', y', z'$; &c., au moyen des expressions $\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}$, &c., qu'on y substituerait à la place des lignes m, &c.; mais elles ne contiennent alors ces coordonnées $x, y, z; x', y', z'$, &c. que d'une certaine manière, et nous voulons passer au cas où elles en seraient des fonctions quelconques.

Pour cela, reprenons notre système libre de l'article précédent, et, choisissant à volonté trois points de ce système, menons de chacune des autres trois lignes à ces points; et supposons, ce dont on est toujours le maître, que, dans les équations $L = const.$, $M = const.$, $N = const.$, &c., il n'entre que ces distances et celles qui joignent nos trois points deux à deux.

Si l'on suppose alors que ces trois points deviennent fixes, les forces de l'équilibre n'en seront pas moins exprimées par les mêmes fonctions qu'auparavant; seulement les trois points fixes supporteront des pressions égales et contraires aux forces qu'il aurait fallu y appliquer s'ils étaient restés libres avec les autres. Actuellement faisons abstraction de ces trois points, c'est-à-dire, regardons les autres comme formant à eux seuls le système que nous avons en vue; les équations entre leurs distances aux trois points fixes deviendront des équations quelconques entre les coordonnées qui déterminent leurs lieux dans l'espace: cependant la loi qui règne entre les forces de l'équilibre sera conservée. Ces forces, il est vrai, ne se feront plus équilibre entre elles *seules*, comme dans le cas du système libre, où nous les avons vues se décomposer en forces, deux à deux, égales et contraires, suivant les droites qui joignent les points; et même il pourra souvent arriver qu'il n'y ait aucune action directe entre ces mêmes points. Mais pour concevoir alors comment l'équilibre s'opère, il faudra supposer qu'on restitue ces points fixes avec lesquels les premiers sont en liaison secrète; et c'est par ces points,

Digitized by Google

comme par des espèces de poulies de renvoi, que ceux du système réagiront les uns sur les autres, et entretiendront la loi de leurs résistances respectives de la même manière que si tout était libre dans l'espace.

Voilà précisément ce qui arrive quand on considère un système dont les points sont liés par des équations *quelconques* entre leurs coordonnées. On ne voit actuellement que les points dont les coordonnées paraissent dans ces équations, et l'on ne peut plus expliquer l'équilibre entre ces seuls corps : c'est qu'en se donnant une équation quelconque entre les coordonnées de plusieurs corps, on introduit tacitement des objets fixes extérieurs auxquels ils se trouvent liés, et souvent par lesquels seuls ils peuvent se communiquer leur action réciproque. Mais si l'on imagine alors qu'on ait pris trois points quelconques dans l'espace, et qu'on ait changé les coordonnées primitives en d'autres qui soient, pour chaque point, ses distances à ces foyers, en ajoutant ces trois points au système, et considérant le tout comme libre, on retrouvera la loi des forces de la même manière que nous l'avons trouvée plus haut; et si l'on ne veut plus compter ensuite les forces particulières des trois points, parce qu'en les supposant fixes, ils n'ont pas besoin d'être retenus par des forces actuelles, et qu'ils trouvent en eux-mêmes les résistances nécessaires pour l'équilibre, on n'aura égard, comme on le fait ordinairement, qu'à celles des points du système proposé, lesquelles auront entre elles les mêmes relations qu'auparavant, et se déduiront immédiatement des équations données, sans leur faire subir aucune transformation.

Et de là résulte enfin ce théorème, qui est l'objet principal du Mémoire :

Quelles que soient les équations qui règnent entre les coordonnées des différens points du système, chacune d'elles, pour l'équilibre, demande qu'on applique à ces points, le long de leurs coordonnées, des forces quelconques proportionnelles aux fonctions primes de cette équation, relativement à ces coordonnées respectives.

Ainsi, en représentant par $L = 0$, $M = 0$, &c. des équations quelconques entre les coordonnées x, y, z, x', y', z', &c. des différens

Digitized by Google

points, et par λ, μ, &c., des coëfficiens quelconques indéterminés, on aura, pour les forces totales, X, Y, Z; X', Y', Z', &c., qui doivent être appliquées à ces points suivant leurs coordonnées :

$$X = \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx}\right) + \&c.$$
$$Y = \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy}\right) + \&c.$$
$$Z = \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz}\right) + \&c.$$

(A)

$$X' = \lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx'}\right) + \&c.$$
$$Y' = \lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy'}\right) + \&c.$$
$$Z' = \lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz'}\right) + \&c.$$
&c.

Si l'on élimine de ces équations les indéterminées λ, μ, &c., il restera les conditions de l'équilibre proprement dites, c'est-à-dire, les relations qui doivent avoir lieu entre les seules forces appliquées et les coordonnées de leurs points d'application pour l'équilibre du système.

Les équations *(A)* sont en même nombre que les coordonnées de tous les points, et les indéterminées λ, μ, &c., en même nombre que les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, &c. Le nombre des conditions de l'équilibre est donc égal à celui de toutes les coordonnées, moins le nombre des équations de condition ; par conséquent les conditions de l'équilibre diminuent à mesure que celles de la liaison augmentent. Mais comme, pour un système entièrement libre et dont le nombre de points est h, il ne pourrait pas y avoir plus de $3h - 6$ équations de condition, auquel cas la figure serait entièrement déterminée, il s'ensuit que, pour l'équilibre d'un tel système, il reste toujours six conditions nécessaires, comme nous le savions d'ailleurs.

Digitized by Google

En général on voit que les équations de l'équilibre, réunies aux équations de condition, suffiront pour résoudre tous les problèmes qu'on pourra se proposer sur l'équilibre du système. Par exemple, on peut se donner les forces appliquées $X, Y, Z; X', Y', Z'$, &c., et demander la figure que doit prendre le système pour se mettre en équilibre en vertu de ces forces. Dans ce cas, les équations réunies dont je viens de parler, et dont le nombre est égal à celui de toutes les coordonnées, serviront à les faire connaître, et par conséquent les lieux des différens corps dans l'espace. Mais si l'on se donnait la figure du système, c'est-à-dire les coordonnées de tous les points, et qu'on demandât les forces capables de faire prendre au système cette figure, comme les forces X, Y, Z, X', Y', Z', &c., qui seraient alors les inconnues, ne se trouvent que dans les équations de l'équilibre, et n'entrent point dans les équations de condition, on aurait moins d'équations que d'inconnues, et le problème demeurerait indéterminé : d'où l'on voit que, pour une même figure du système, il y a une infinité de groupes de forces capables de s'y faire équilibre; ce qui s'accorde encore avec ce que nous avons trouvé précédemment, &c. &c.

Mais je passe à la conclusion générale, où l'on rappelle sous un même point de vue le problème de l'équilibre et du mouvement.

V.

CONCLUSION.

Les lois de l'équilibre et du mouvement d'un point libre sont connues et parfaitement démontrées; mais s'il y a plusieurs points liés entre eux par des conditions quelconques, quelles seront les lois de l'équilibre et du mouvement de tout le système ? Voilà le problème général de la mécanique.

Or l'idée la plus naturelle dans cette recherche, est de considérer que si tout le système est actuellement en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, en vertu des forces qui lui sont immédiatement appliquées, et des résistances qu'il éprouve de la part des autres,

Digitized by Google

à cause de sa liaison avec eux. Et de même, quand le système entre en mouvement, chaque point doit se mouvoir comme s'il était libre et qu'il obéît à-la-fois aux forces qui le sollicitent et aux forces de résistance dont nous venons de parler. Si donc on savait évaluer ces résistances mutuelles, on n'aurait qu'à les combiner avec les forces immédiatement données par l'état de la question, et, posant les équations de l'équilibre ou du mouvement pour chaque point, comme s'il était parfaitement libre, on aurait tout ce qui serait nécessaire pour déterminer l'état du système dans l'espace, et le problème serait résolu.

Toute la mécanique se réduit donc à savoir estimer les résistances réciproques que peuvent se prêter les différens corps d'un système, en vertu des conditions qui les lient.

Mais pour donner là-dessus une règle *générale*, il faut nécessairement concevoir ces conditions exprimées sous une forme *générale*. Il faut commencer par établir la définition générale des systèmes; sans quoi la mécanique ne serait plus que l'énumération des cas particuliers d'équilibre et de mouvement que l'on saurait résoudre, et il n'y aurait pas plus lieu de s'en proposer le problème général, que, dans la géométrie, de chercher une règle générale des tangentes, si l'on ne supposait avant tout les courbes définies par des équations.

Or, en supposant que les conditions qui lient entre eux plusieurs corps et qui en font un *Système*, consistent en ce que, dans toutes les positions où peuvent passer ces corps, il y ait des fonctions quelconques de leurs coordonnées qui doivent toujours demeurer nulles ou constantes, nous avons démontré qu'en vertu de chacune d'elles, les corps sont rendus capables, suivant leurs coordonnées, de résistances proportionnelles aux fonctions primes de cette fonction, relativement à ces coordonnées respectives.

On n'aura donc, pour résoudre les problèmes, qu'à prendre les résistances mutuelles des corps, d'après cette règle générale; à combiner ces forces avec celles qui leur sont immédiatement appliquées, et à traiter séparément chacun d'eux, comme s'il était libre.

Digitized by Google

Ainsi, des équations précédentes *(A)*, les trois premières peuvent être regardées comme les équations de l'équilibre du premier point qui serait libre, mais sollicité à-la-fois par les forces appliquées X, Y, Z, et par les forces contraires $\left[\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx}\right)+\text{&c.}\right]$, $\left[\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy}\right)+\text{&c.}\right]$, $\left[\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz}\right)+\text{&c.}\right]$, qui naissent des équations $L=0$, $M=0$, &c.

De même les trois équations suivantes peuvent être considérées &c., et ainsi des autres.

Quant aux équations du mouvement, on les formera en égalant l'expression générale de la force accélératrice, suivant chaque coordonnée, à la force appliquée, combinée avec la résistance suivant cette même coordonnée, et l'on aura, pour le premier point,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx}\right)+\text{&c.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy}\right)+\text{&c.}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz}\right)+\text{&c.}$$

et de même pour le second point,

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=X'+\lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx'}\right)+\text{&c.}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}=Y'+\lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy'}\right)+\text{&c.}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2}=Z'+\lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz'}\right)+\text{&c.}$$

et ainsi de suite pour les autres points du système.

Telles sont les équations générales du mouvement, d'où l'on tirera, par les règles du calcul intégral, la solution de tous les problèmes qu'on pourra se proposer sur le mouvement du système.

De la loi de l'équilibre établie ci-dessus, nous aurions bien pu conclure que si l'on trouble infiniment peu l'équilibre d'un système quelconque de corps, de manière que les conditions de la liaison ne soient pas

Digitized by Google

pas violées, la somme des *momens* de toutes les forces appliquées, c'est-à-dire, suivant l'acception de *Galilée*, la somme de leurs produits par les chemins respectifs que parcourent leurs points d'application dans le sens de ces forces, doit toujours être égale à zéro, ce qui constitue le principe des vîtesses virtuelles; mais ce principe n'est plus alors qu'un simple corollaire de la théorie précédente, lequel, pour la solution des problèmes, nous ramènerait à la règle générale d'où nous l'aurions tiré lui-même, et ne se ferait même bien entendre que par cette règle (*).

On voit encore qu'il a été inutile de rappeler le fameux principe de *D'Alembert*, qui réduit la Dynamique à la Statique. En vertu de ce principe, si l'on décompose chaque mouvement imprimé en deux autres, dont l'un soit celui que le corps prendra réellement, tous les autres doivent se faire équilibre entre eux; c'est-à-dire, que si l'on décompose chaque mouvement imprimé en deux autres dont l'un soit celui que le corps perd, l'autre sera celui qu'il prendra. Mais cela revient immédiatement à ce qu'on vient de dire, savoir, que le mouvement réel de chaque point est le résultat de son mouvement imprimé, et de la résistance qu'il éprouve par sa liaison avec les autres; ce qui est évident de soi-même. Ainsi le principe de *D'Alembert* n'est au fond que cette idée simple qu'on remarque à peine dans la suite du raisonnement, et qui ne revêt la forme d'un principe que par l'expression qu'on lui donne.

Cependant comme on a vu que, pour avoir le mouvement de chaque point, il faut connaître la résistance qu'il peut éprouver de la part des autres, et que, d'un autre côté, ces résistances mutuelles ne sont autre chose que des forces qui se font équilibre à chaque instant sur le système, dans les figures successives où il passe; il en résulte non-seulement que les conditions du mouvement peuvent être ramenées à celles de l'équilibre, comme on le savait déjà par le principe de *D'Alembert*, mais encore qu'elles doivent y revenir nécessairement d'elles-mêmes;

(*) *Voyez* la Mécanique analytique, et la Théorie des fonctions analytiques.

Digitized by Google

que dans l'étude ordonnée des parties de la mécanique, on ne peut pas traiter l'équilibre comme un cas particulier de mouvement, et qu'il est dans la nature des choses que la Dynamique soit fondée sur la Statique.

NOTE I.re

Sur ce principe, que, dans l'équilibre des systèmes, chaque force doit être perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle le point d'application n'aurait plus que la liberté de se mouvoir, si tous les autres points devenaient fixes.

CE principe peut être regardé comme un élément de la théorie générale de l'équilibre ; il est clair, parfaitement exact, et la vérité en est hors d'atteinte. En effet, on démontre que, si un point n'a d'autre liberté dans l'espace que celle de se mouvoir sur une surface ou sur une ligne courbe fixement arrêtée, il n'y peut être en équilibre, à moins que la résultante des forces qui le sollicitent ne soit perpendiculaire à cette surface ou à cette ligne courbe.

Or, soit un système quelconque de points en équilibre en vertu d'autant de forces appliquées, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule force pour chaque point : l'équilibre ne sera pas troublé si l'on fixe tous les points, hors un seul, et qu'on supprime ensuite toutes les forces appliquées aux points devenus fixes. Il ne restera donc à considérer qu'un seul point, et la force unique qui le sollicite ; mais si, par la nature du système, quand on fixe tous les points, hors un seul, celui-ci ne conserve plus que la liberté de se mouvoir sur une certaine surface ou sur une courbe ; il est précisément dans le même cas que s'il y eût été placé d'abord, comme sur un objet fixement arrêté ; et puisqu'il y est en équilibre, il faut que la force *unique* qui agit sur lui soit perpendiculaire à cette surface ou à cette ligne courbe.

Mais on voit que, pour la rigueur de la démonstration, il faut entendre simplement la surface ou la courbe que le point pourrait décrire dans le seul cas où l'on fixerait tous les autres points du système sans exception ; car si l'on ne fixait qu'une partie des autres points, il ne serait plus permis de supprimer, comme on l'a fait, toutes les autres forces du système, et de ramener ainsi la question au cas où il n'y a plus qu'un seul point et une seule force à considérer. Je vais éclaircir ceci par un exemple.

Dans le système formé de trois points A, B, C, liés entre eux de manière à ne pouvoir changer leurs distances mutuelles ; en considérant le point A, par exemple, si l'on ne supposait devenu fixe qu'un seul des deux autres, comme le point C, on verrait que ce premier point n'a plus que la liberté de décrire une sphère au tour du

Digitized by Google

point C comme centre; d'où il paraîtrait s'ensuivre que, pour l'équilibre, la force appliquée en A doit être normale à cette sphère, et par conséquent dirigée vers le point C: ce qui n'est pas nécessaire.

Mais, si l'on suppose rendus fixes à-la-fois les deux points B et C, le point A n'a plus que la liberté de décrire un arc de cercle autour de la droite BC, comme axe de révolution; et l'on peut ici rigoureusement conclure que la force appliquée doit être perpendiculaire à la direction de cet arc de cercle; condition qui n'oblige la force qu'à se trouver, d'une manière quelconque, dans le plan des trois points A, B, C, comme on sait que cela doit être.

Quand on ne fixe qu'un seul point C, il est bien vrai que le point A ne peut plus se mouvoir que sur une sphère déterminée; mais observez qu'il ne peut le faire sans entraîner l'autre point B, lequel, étant sollicité par une force (qu'on n'a pas pu lui ôter puisqu'il est resté mobile), réagit nécessairement sur le point A. Dans cette hypothèse donc, la force que l'on voit appliquée en A n'est pas la seule qui sollicite ce point, et il n'est pas nécessaire qu'elle soit perpendiculaire à la surface qu'il pourrait décrire, puisque, d'après le principe même, cela ne convient qu'à la résultante de toutes les forces qui pourraient agir sur le point que l'on considère. Il n'en est pas de même quand on suppose rendus fixes à-la-fois les deux points B et C; la force appliquée au point A est alors la seule qui l'anime, puisqu'on peut regarder les deux autres forces du système comme supprimées; et par conséquent il est nécessaire ici que la force appliquée soit perpendiculaire à la direction de la courbe où le point conserve encore la liberté de se mouvoir.

Au reste, on pourrait encore appliquer le principe dans la première hypothèse; mais, pour être exact, il faudrait commencer par prendre l'action du point B sur le point A, combiner ensuite cette force avec celle qui y est immédiatement appliquée, et l'on trouverait que la résultante de ces deux forces doit être normale à la sphère dont il s'agit, comme cela a réellement lieu.

Mais il est bien plus clair et plus simple de n'employer ce principe que selon l'énoncé qu'on en a fait au commencement de cette note. On ne s'en est même servi dans le mémoire, que pour les systèmes où les points ne sont liés que par une seule équation : il n'y a pas là deux manières de l'entendre; car, s'il n'y a qu'une seule équation entre les coordonnées des points, il faut nécessairement les supposer fixes tous, hors un seul, pour que celui-ci devienne assujetti à ne pouvoir plus que décrire une surface. Si on en laissait seulement un autre mobile, celui que l'on considère ne serait gêné d'aucun côté dans l'espace; il pourrait encore s'y mouvoir en tous sens, et il n'y aurait plus lieu de rien tirer de cette hypothèse pour la direction de la force appliquée dans le cas de l'équilibre.

Digitized by Google

Puisque dans la théorie générale de l'équilibre il a suffi de considérer ce principe dans un cas où il n'offre pas la plus légère difficulté, et que tout le reste s'en trouve déduit avec rigueur, on aurait pu se dispenser d'y revenir dans cette note; et de lever des difficultés qui ne peuvent pas naître. Mais nous avons voulu faire voir que ce principe est général, qu'il a lieu dans toutes les machines, et nous l'avons remarqué particulièrement dans le *levier*, pour nous conformer au désir que M. *Lagrange* nous a fait l'honneur de nous témoigner à cet égard. Le levier n'est, en effet, que le système de l'exemple précédent, où l'un C des trois points A, B, C est véritablement fixe. On ne considère plus alors que l'équilibre des deux forces appliquées aux deux bouts A et B du levier, et le point d'appui C tient lieu de la troisième force. On voit donc que notre principe ne dit pas que les deux forces appliquées doivent être normales aux sphères que les deux bouts A et B du levier pourraient décrire autour du point d'appui C; mais bien qu'elles doivent être perpendiculaires aux arcs de cercle respectifs que ces points pourraient décrire autour des droites CB et CA, comme axes de révolution; d'où il suit que les deux forces appliquées doivent être dans un même plan avec l'appui; ce qui est la première condition connue de l'équilibre du levier.

Quant à la seconde condition, elle résulte de ce qu'on a dit sur les systèmes invariables : chacune des deux forces étant décomposée en deux autres, la première vers le point d'appui, la seconde vers l'autre bout du levier, les deux premières se trouvent toujours détruites par la résistance de l'appui; mais les deux secondes doivent être parfaitement égales et contraires.

Tout cela subsiste, quel que soit l'angle C du triangle ACB, et par conséquent a lieu encore dans le cas où cet angle devient égal à deux droites : c'est ainsi qu'on passe au *levier droit*, qui n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons de considérer. Mais on n'y pourrait plus faire immédiatement usage des raisonnemens précédens; car les trois points A, C, B étant en ligne droite, si l'on en suppose deux fixes, le troisième se trouve tout-à-fait arrêté, ce qui n'apprend plus rien pour les directions des forces, ou ce qui semblerait dire qu'elles peuvent être dirigées d'une manière quelconque. D'un autre côté, on ne peut plus décomposer chacune d'elles en deux autres, suivant les mêmes lignes que ci-dessus, puisque ces lignes n'en font plus qu'une seule. Aussi, pour comprendre et pour bien expliquer l'équilibre du levier droit, faut-il le supposer infiniment peu rompu au point d'appui, comme l'a fait M. *Laplace* dans sa *Mécanique céleste*. On voit reparaître alors les vraies conditions de l'équilibre du levier, et même la manière dont les forces y réagissent l'une sur l'autre. Que si la marche paraît indirecte, et la démonstration peu naturelle en ce qu'on paraît déduire une chose simple d'une chose composée, c'est qu'on ne fait pas assez d'attention à l'idée de roideur qui

Digitized by Google

paraît simple et qui est réellement complexe. Pour écrire, en effet, que trois points A, C, B font partie d'un corps roide, il faut nécessairement écrire que leurs trois distances mutuelles sont séparément invariables, et cela, que les trois points soient en ligne droite ou non. Il n'y a donc, pour l'objet que l'on a en vue, rien de plus simple dans un cas que dans l'autre. Mais si, dans le cas où les points sont en ligne droite, la loi de leur équilibre ne se montre plus aussi bien, ou même nous échappe, il sera très-naturel de supposer d'abord que les trois points ne sont pas en ligne droite, d'y voir alors la loi de l'équilibre, et de la suivre jusqu'au cas où les points redeviennent en ligne droite. C'est ainsi que dans l'Analyse, pour trouver les vraies valeurs de certains symboles algébriques, il ne faut plus les considérer en eux-mêmes, mais remonter aux fonctions qui les ont pu produire par l'hypothèse de quelques valeurs particulières attribuées aux variables.

NOTE II.

Démonstration du principe des vîtesses virtuelles ; Identité de ce principe avec le théorème général qui fait l'objet du Mémoire précédent.

ON s'est contenté d'observer dans le Mémoire, que du théorème où l'on est parvenu sur l'expression générale des forces de l'équilibre, on pouvait passer aisément au principe des vîtesses virtuelles. Mais ce principe est si célèbre dans l'histoire de la Mécanique, que je ne puis m'empêcher de marquer en peu de mots ce passage ; et j'y reviens d'autant plus volontiers, que, non-seulement le principe des vîtesses virtuelles est un corollaire de la proposition générale établie ci-dessus, mais qu'il me paraît encore identique avec elle lorsqu'on le regarde sous son vrai point de vue, et qu'on l'énonce d'une manière complète.

Soit le système défini par les équations suivantes entre les coordonnées des corps,

$$f(x, y, z; x', y', z', \&c.) = 0.$$
$$\varphi(x, y, z; x', y', z', \&c.) = 0.$$
$$\&c.$$

Supposons qu'on imprime à tous ces corps des vîtesses quelconques qu'ils puissent avoir actuellement sans violer les conditions de la liaison ; les coordonnées $x, y, z; x', y', z'$, &c., varieront avec le temps t, dont il faudra les regarder comme fonctions ; et, pour que les vîtesses imprimées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, &c. soient permises par

Digitized by Google

la liaison, comme on le suppose, il faudra qu'elles satisfassent aux équations,

$$f'(x)\frac{dx}{dt} + f'(y)\frac{dy}{dt} + f'(z)\frac{dz}{dt} + f'(x')\frac{dx'}{dt} + f'(y')\frac{dy'}{dt} + \&c.\,\&c. = 0.$$

$$\varphi'(x)\frac{dx}{dt} + \varphi'(y)\frac{dy}{dt} + \varphi'(z)\frac{dz}{dt} + \varphi'(x')\frac{dx'}{dt} + \varphi'(y')\frac{dy'}{dt} + \&c.\,\&c. = 0 \ldots (B)$$

&c., tirées des précédentes *(A)*;

et il suffira qu'elles y satisfassent pour que les conditions de la liaison soient observées.

Ou bien, si l'on multiplie ces équations par des coëfficiens quelconques indéterminés λ, μ, &c., et qu'on les ajoute, il suffira qu'elles satisfassent à la seule équation suivante, indépendamment de λ, μ, &c.

$$[\lambda f'(x) + \mu\varphi'(x) + \&c.]\frac{dx}{dt} + [\lambda f'(y) + \mu\varphi'(y) + \&c.]\frac{dy}{dt} + [\lambda f'(z) + \mu\varphi'(z) + \&c.]\frac{dz}{dt}$$

$$+ [\lambda f'(x') + \mu\varphi'(x') + \&c.]\frac{dx'}{dt} + [\lambda f'(y') + \mu\varphi'(y') + \&c.]\frac{dy'}{dt} + \&c.\,\&c. = 0 \ldots\ldots (C)$$

Or les fonctions qui multiplient les vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, &c. &c., ne sont autre chose (d'après ce qui a été démontré) que les expressions générales des forces capables d'être en équilibre sur le système. Supposant donc des forces X, Y, Z; X', Y', Z', &c., qui s'y feraient actuellement équilibre, on aurait :

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} + X'\frac{dx'}{dt} + Y'\frac{dy'}{dt} + Z'\frac{dz'}{dt} + \&c. = 0 \ldots (D)$$

Au lieu des trois composantes X, Y, Z, multipliées par les vîtesses respectives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on peut mettre la résultante P, multipliée par la vîtesse résultante, projetée sur la direction de P, et que je nommerai $\frac{ds}{dt}$; et de même pour les autres; et l'on aura :

$$P\frac{ds}{dt} + P'\frac{ds'}{dt} + P''\frac{ds''}{dt} + \&c. = 0;$$

c'est-à-dire que si des forces se font équilibre sur un système quelconque, la somme de leurs produits par les vîtesses, quelles qu'elles soient, qu'on voudra imprimer aux corps, mais que leur liaison permet, sera toujours égale à zéro, en estimant ces vîtesses suivant les directions des forces.

On voit par-là qu'on peut prendre des vîtesses quelconques finies, que l'on mesurerait par des droites quelconques qui seraient simultanément décrites par les corps, s'ils venaient tout-à-coup à rompre leur liaison et à s'échapper librement chacun de son côté.

Quand on veut mesurer ces vîtesses par les espaces mêmes que les corps décrivent

Digitized by Google

réellement, comme elles varient à chaque instant par la liaison des corps, il faut prendre ces espaces infiniment petits, sans quoi ils ne mesureraient plus les vîtesses imprimées; et c'est ainsi qu'on tombe dans les *vîtesses virtuelles* proprement dites, où le principe vient perdre une partie de sa clarté.

Il résulte, en effet, de ce que nous venons de dire, que cette belle propriété de l'équilibre peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'on voit suivre aux différens corps d'un système des mouvemens quelconques qui ne violent point la liaison établie entre eux, c'est-à-dire, qui nous présentent continuellement le système dans des figures où les équations de condition subsistent, on peut être sûr que les forces qui seraient capables de se faire équilibre sur une de ces figures, dans le moment où le système y passe, sont telles que, multipliées par les vîtesses actuelles *des corps projetées sur leurs directions, la somme de tous ces produits est nécessairement égale à zéro.*

Le principe de cette manière n'offre plus aucune trace de ces idées de mouvemens infiniment petits, et de perturbation d'équilibre, qui paraissent étrangères à la question, et qui laissent dans l'esprit quelque chose d'obscur.

Lorsqu'il y a équilibre, il est clair que le principe a lieu pour tous les systèmes de vîtesses que les points pourraient avoir en passant par la figure que l'on considère.

Mais, quand on veut partir du principe, et l'énoncer de manière qu'il assure l'équilibre, faut-il dire qu'il a lieu pour ce nombre infini de systèmes de vîtesses! Il y aurait surabondance de conditions, et l'on voit qu'il suffit de dire que l'équation *(D)* doit se vérifier pour autant de systèmes de vîtesses que les équations de condition *(B)* en laissent d'indépendantes; ou bien (en réunisant, comme on l'a fait ci-dessus, toutes ces équations en une seule *(C)*, au moyen des indéterminées λ, μ, &c.), il suffit de dire que l'équation *(D)* des *momens* doit se vérifier pour autant de systèmes de vîtesses qu'il y a de vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, &c. Mais comme chacun de ces systèmes de vîtesses doit satisfaire à l'équation *(C)*, par hypothèse, cela revient à dire que toutes les forces appliquées X, Y, Z; X', Y', Z', &c. qui multiplient les vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, &c., dans l'équation *(D)*, doivent être toutes proportionnelles aux fonctions $[\lambda f'(x) + \mu\varphi'(x) + \&c.]$, $[\lambda f'(y) + \mu\varphi'(y) + \&c.]$, $[\lambda f'(z) + \mu\varphi'(z) + \&c.]$, $[\lambda f'(x') + \mu\varphi'(x') + \&c.]$, $[\lambda f'(y) + \mu\varphi'(y') + \&c.]$, &c., qui multiplient les mêmes vîtesses dans l'équation générale *(C)*, qui fait régner entre elles les seules conditions que la liaison exige. Donc le principe des vîtesses virtuelles, bien énoncé, c'est-à-dire avec toutes les idées qui peuvent le faire comprendre, est parfaitement identique avec le théorème général qui fait l'objet du Mémoire. Il dit exactement la même chose; savoir, que,

Digitized by Google

pour l'équilibre, les forces appliquées suivant les coordonnées des corps, en vertu de chaque équation, doivent être proportionnelles aux fonctions *primes* de cette équation, relativement à ces coordonnées respectives : mais c'est là précisément ce qu'il fallait démontrer.

Au reste, on serait encore conduit à reconnaître cette identité en partant de l'énoncé ordinaire du principe des vîtesses virtuelles, et se rendant bien compte, avant tout, du vrai sens qu'on y doit attacher. En effet, le problème général de la statique n'est pas seulement de chercher les rapports des forces qui se font actuellement équilibre, sur le système, mais bien l'expression générale des forces qui peuvent s'y faire continuellement équilibre, dans toutes les figures où il peut passer en vertu des équations de condition. L'équation générale donnée par le principe des vîtesses virtuelles n'est donc pas, s'il est permis de parler ainsi, la relation d'un moment; elle ne doit pas simplement considérer l'équilibre du système dans la figure où il est, mais encore dans toute la suite des figures où il peut être, puisque c'est cette suite de figures qui le caractérise et en constitue la définition. Ainsi l'équation des *momens* ne dit pas qu'il faut prendre pour les forces de tels nombres qu'elle en soit satisfaite, mais (puisque ces forces doivent varier avec la figure) qu'il faut choisir pour les représenter de telles fonctions des coordonnées, qu'elle demeure continuellement satisfaite, ou soit identique. Or, en vertu des conditions mêmes, on sait qu'il doit régner entre les vîtesses simultanées que pourraient avoir les corps, une équation linéaire identique *(C)*, dont les coëfficiens sont les fonctions *primes* des fonctions données par rapport aux coordonnées suivant lesquelles on estime ces vîtesses. L'équation des *momens* dit donc que les forces de l'équilibre doivent être représentées par ces fonctions; et par conséquent, pour la démontrer, il faut faire voir comment de telles forces se font effectivement équilibre; ou bien il fallait chercher directement quelles fonctions des coordonnées peuvent représenter les forces de l'équilibre, comme nous l'avons fait d'abord.

C'est pourquoi la plupart des démonstrations par lesquelles on a ramené le principe des vîtesses virtuelles, ou à d'autres principes, ou à la loi connue de quelque machine simple, telle que le levier, &c., nous paraissent bien plutôt des preuves que de véritables démonstrations. Toutes, en effet, même la plus heureuse, qui est de M. *Carnot*, se font sans rien emprunter de la définition générale du système, comme si la machine était, pour ainsi dire, voilée, et qu'on n'en vît sortir que les cordons où sont appliquées les puissances. On peut bien prouver ou rendre sensible par quelque construction plus ou moins simple, que si l'on trouble un peu l'équilibre, ces puissances doivent être dans un certain rapport avec les alongemens permis de ces cordons; mais cela ne peut offrir que les rapports actuels des forces considérées comme nombres, et ne montre point du tout la forme d'expression qui leur est propre.

Digitized by Google

propre. Cette perturbation de l'équilibre n'apprendrait, dans aucun cas, à quelle machine on aurait affaire, et les mêmes rapports pourraient s'offrir entre les forces appliquées, quoique les machines fussent de constitution tout-à-fait différente, et que chacune d'elles imprimât pourtant à l'expression des forces qui lui conviennent, une forme différente qu'on y devrait voir et retrouver sans cesse, si la difficulté du théorème était entièrement consommée. Ainsi, la propriété des vîtesses virtuelles n'en reste pas moins mystérieuse, et l'on n'a pas de véritable démonstration, je veux dire une explication ouverte et claire, où l'on voie non-seulement que la chose se passe ainsi, mais qu'elle est encore une suite de la définition générale que soi-même on a donnée au système que l'on considère.

C'est peut-être par une vue semblable, et pour arriver à l'équation des *momens* comme à une équation identique, que M. *Laplace* n'a considéré que les équations qui représentent la liaison des parties du système, et n'a d'ailleurs employé d'autres principes que celui de la composition des forces et de l'égalité entre l'action et la réaction; ce qu'on peut regarder comme les élémens de la théorie de l'équilibre.

Quoi qu'il en soit, au reste, soit qu'on veuille partir du principe des vîtesses virtuelles pour en suivre jusqu'au bout la signification intime, soit qu'on attaque directement le problème de la mécanique, ce qui est plus simple, on se trouve amené sur-le-champ à chercher quelles sont les fonctions des coordonnées qui donnent les forces de l'équilibre dans toutes les figures que peut affecter le système, en obéissant aux équations qui règnent entre les coordonnées des différens corps. Tel est exactement le problème que nous nous sommes proposé; et notre objet bien net et bien distinct a été de le résoudre par les premiers principes de la statique et de la géométrie.

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur les Axes de suspension synchrones.

Par M. BIOT, ancien Élève de l'École Polytechnique, et Membre de l'Institut national.

ON trouve dans l'admirable ouvrage d'*Huygens*, de *Horologio oscillatorio*, les deux théorèmes suivans, qui s'appliquent à tous les corps solides: le centre d'oscillation et celui de suspension sont réciproques l'un de l'autre; et un même corps est toujours isochrone à lui-même lorsqu'il oscille autour d'axes parallèles pris à égale distance du centre de gravité. Ces théorèmes ne sont pas sans intérêt pour la géométrie, parce qu'ils sont du petit nombre de ces propriétés générales qui sont indépendantes de la figure extérieure des corps et de la loi de leur densité. Mais quoiqu'on les ait fréquemment rappelés depuis, et qu'on en ait même fait des applications, il ne paraît pas qu'on y ait rien ajouté. Cependant ils sont susceptibles d'une extension beaucoup plus grande; et comme la démonstration s'en peut faire d'une manière très-simple, en leur laissant toute leur généralité, je vais la donner ici en peu de mots.

Lorsqu'un corps solide et pesant oscille autour d'un axe fixe et horizontal que je prendrai pour axe des y, la longueur l du pendule synchrone est donnée par l'équation

$$l = \frac{\int (x^2 + z^2)\, dm}{m H},$$

m désignant la masse totale du corps, H la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension, et $\int (x^2 + z^2)\, dm$ le moment d'inertie du corps relatif à cet axe. L'intégrale $\int (x^2 + z^2)\, dm$, dépend, quant à ses limites, de la distance H; mais on peut en dégager ce qui est relatif à cette quantité : car si l'on transporte l'origine des coordonnées

Digitized by Google

x et z au centre de gravité, en les laissant toujours parallèles à elles-mêmes, et qu'on les désigne par x' z' en nommant ξ et ζ celles du centre de gravité, on aura

$$x = \xi + x', \quad z = \zeta + z',$$

d'où

$$\int(x^2+z'^2)\,dm = m(\xi^2+\zeta^2) + 2\xi\int x'\,dm + 2\zeta\int z'\,dm + \int(x'^2+z'^2)\,dm;$$

équation qui se réduit à

$$\int(x^2+z^2)\,dm = mH^2 + \int(x'^2+z'^2)\,dm,$$

en vertu des propriétés du centre de gravité. Enfin, on peut encore faire sortir de l'intégrale ce qui tient à la direction particulière de l'axe de suspension que l'on considère; car si l'on nomme Z, Z', Z'' les angles formés par cet axe avec les trois axes principaux du corps, et que l'on désigne par A, B, C les momens d'inertie du solide relatifs à ces axes, on aura, par les théorèmes connus,

$$\int(x'^2+z'^2)\,dm = A\cos.^2 Z + B\cos.^2 Z' + C\cos.^2 Z'',$$

la somme des carrés des trois cosinus étant égale à l'unité. Ce résultat substitué dans les équations précédentes, donne enfin

$$l = H + \frac{A\cos.^2 Z + B\cos.^2 Z' + C\cos.^2 Z''}{mH} \qquad (1).$$

Les intégrales qui entrent dans cette expression ne se rapportent qu'aux axes principaux du solide, elles sont indépendantes de la position particulière des axes de suspension, et restent, par conséquent, les mêmes pour tous ces axes.

La valeur de l ne change point lorsque la distance H reste la même, ainsi que les angles Z, Z', Z''; par conséquent *si l'on conçoit autour du centre de gravité un cylindre droit à base circulaire, d'un rayon quelconque, dont l'axe passe par le centre, toutes les arêtes de ce cylindre seront des axes de suspension synchrones; c'est le théorème de* Huygens.

Mais quels que soient les angles Z, Z', Z'', la valeur de l ne variera pas

Digitized by Google

si l'on détermine H de manière à satisfaire à l'équation (1); par conséquent *si l'on fait mouvoir ce cylindre droit, de manière que son axe décrive autour du centre de gravité une surface conique arbitraire, en rendant son rayon variable, conformément à l'équation* (1), *toutes les arêtes de ce cylindre, dans ses diverses positions, seront des axes synchrones.*

La condition établie par l'équation (1) se réduit à ce que le rayon H du cylindre, et la distance $l - H$ de sa surface au centre d'oscillation, fassent un produit dont la valeur est donnée pour chaque cylindre.

On voit que ce théorème est beaucoup plus général que celui d'*Huygens*, puisqu'il donne une infinité d'axes synchrones dans des directions quelconques, tandis que le théorème d'*Huygens* ne donne que des axes parallèles.

Si l'on veut connaître parmi tous ces axes ceux qui sont à une même distance du centre de gravité, il suffit de poser en même temps les deux équations

$$H = h, \quad A\cos.^2 Z + B\cos.^2 Z' + C\cos.^2 Z'' = m(l - h)h.$$

La première représente une sphère décrite du rayon h, et concentrique au centre de gravité. Quant à la seconde, si l'on fait, pour plus de simplicité, $m(l - h)h = M$, et qu'on représente par

$$x = az, \quad y = bz,$$

les équations d'un axe mené par le centre de gravité parallélement aux axes proposés, on en tire

$$(M - A)x^2 + (M - B)y^2 + (M - C)z^2 = 0;$$

et sous cette forme, on voit qu'elle représente une surface conique du second ordre, dont l'axe est un des axes principaux du corps.

Ainsi, étant donné un axe de suspension dont la distance au centre de gravité et le moment d'inertie sont connus, pour trouver les axes synchrones qui sont à la même distance de ce centre, il faut concevoir un cylindre droit tangent à la sphère dont le rayon est H, et faire mouvoir ce cylindre sur la sphère, de manière que son axe se trouve

Digitized by Google

toujours sur une surface conique du second degré, dont l'équation est

$$(M - A)x^2 + (M - B)y^2 + (M - C)z^2 = 0,$$

toutes les arêtes du cylindre, pendant son mouvement, seront des axes synchrones.

Cette surface conique aura pour axe le premier ou le second axe principal, suivant que le moment d'inertie M, commun à tous les axes approchera plus d'être égal au plus grand ou au plus petit moment d'inertie du corps. Si ce moment d'inertie est égal à celui d'un des axes principaux, la surface conique se réduit à une ligne droite, il n'y a qu'une seule position du cylindre qui donne des axes synchrones, et ces axes sont tous parallèles à l'axe principal dont il s'agit; si deux des momens d'inertie sont égaux entre eux, la surface conique directrice est de révolution; enfin si les trois momens d'inertie sont égaux entre eux, elle devient tout-à-fait arbitraire, il n'en résulte aucune condition, et tous les axes placés à égales distances du centre de gravité sont des axes synchrones.

On voit que cette surface conique du temps du second ordre n'est que la particularisation de la surface conique arbitraire qui sert de directrice dans le cas général où les axes ne doivent pas se trouver à une même distance du centre de gravité.

On pourrait de même trouver tous les axes synchrones qui satisferaient à telle autre condition que l'on voudrait imaginer; mais pour introduire facilement ces conditions, il est bon de transformer l'équation (1) en coordonnées rectangulaires. Soient donc

$$x = az + d, \quad y = bz + \beta$$

les équations d'un des axes cherchés, on aura, par les théorèmes connus,

$$\text{Cos. Z} = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}, \quad \text{cos. Z'} = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}, \quad \text{cos. Z''} = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$H = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}};$$

Digitized by Google

et en substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient

$$l = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}} + \frac{Aa^2+Bb^2+C}{m\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{(1+a^2+b^2)}} \quad (2).$$

C'est l'équation de condition qui caractérise les axes synchrones, en la combinant avec les suivantes,

$$x = az + \alpha; \; y = bz + \beta.$$

On ne peut pas éliminer les quatre quantités a, b, α, β; on pourra donc se donner à volonté deux relations quelconques entre elles, et l'élimination fera ensuite connaître la surface sur laquelle se trouvent les axes synchrones qui y satisfont.

Si l'on veut, par exemple, que tous les axes synchrones passent par un même point dont les coordonnées soient x, y, z, on aura

$$x-x'=a(z-z'), y-y'=b(z-z'), \alpha=(x'-az')=\frac{x'z-z'x}{z-z'}, \beta=y'-bz'=\frac{y'z-z'y}{z-z'}.$$

Éliminant a, b, α, β, au moyen de ces valeurs, on trouve

$$l\,[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}} = [(x'z-z'x)^2+(y'z-z'y)^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{A[(x-x')^2+B(y-y')^2+C(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}{m[(x'z-z'x)^2+(y'z-z'y)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Le système de tous les axes synchrones qui passent par un même point du corps, forme donc une surface conique du quatrième ordre : on opérerait d'une manière analogue si l'on adoptait d'autres conditions.

L'équation (1) *étant du second degré en* H, *donnera généralement, pour cette quantité, deux valeurs. Il y aura donc, en général, pour chaque cas, deux systèmes de surfaces qui donneront des axes synchrones, ce qui double l'étendue des résultats que nous venons d'obtenir.* Ce théorème est analogue à celui d'*Huygens*, que le centre d'oscillation et le centre de suspension sont réciproques l'un de l'autre.

Digitized by Google

MÉCANIQUE.

Démonstration générale du principe des Vîtesses virtuelles, dégagée de la considération des infiniment petits;

Par M. AMPÈRE, Répétiteur à l'École Polytechnique.

PARMI les découvertes mathématiques qui ont illustré la fin du dernier siècle, une des plus remarquables est sans doute d'avoir exprimé par une seule équation tous les cas de l'équilibre et du mouvement. Cette équation résulte de la combinaison du principe des vîtesses virtuelles et de celui à l'aide duquel *D'Alembert* a ramené la dynamique à la statique. L'évidence de ce dernier principe fut mise dans tout son jour par ce célèbre mathématicien, qui, en le publiant, en donna de nombreuses applications. Il n'en a pas été de même de celui des vîtesses virtuelles, remarqué par *Galilée*, généralisé par *Bernoulli*, démontré, pour des cas particuliers, par *Varignon;* il resta long-temps stérile, parce qu'on ignorait également et la manière de l'exprimer par une équation générale, et les procédés de calcul nécessaires pour déduire de cette équation la solution de tous les problèmes relatifs à l'action des forces. Enfin parut la *Mécanique analytique;* la science de l'équilibre et du mouvement devint une branche de l'analyse mathématique, et tous les résultats dont elle se compose ne furent plus que des applications d'une formule aussi simple que féconde.

Le principe des vîtesses virtuelles qui sert de base à cet admirable ouvrage, fut considéré par son auteur comme un fait dont il ne se proposait alors que de développer toutes les conséquences; on s'est occupé depuis de la démonstration générale de ce principe : M. *Lagrange* l'a ramené, d'une manière très-simple, au principe de l'équilibre des moufles, M. *Carnot* à celui de l'équilibre du levier. La démonstration de ce même principe a été déduite par M. *Laplace*, de considérations plus générales,

Digitized by Google

mais trop abstraites peut-être pour être mises facilement à la portée des commençans. Je me suis proposé de donner, autant qu'il me sera possible, la même généralité à une démonstration qui reposât uniquement sur la théorie de la composition et de la décomposition des forces appliquées à un même point, et qui fût dégagée de la considération des quantités infiniment petites : tel a été le but que je me suis proposé dans les recherches que j'ai l'honneur de présenter à la classe.

Les lois de l'équilibre se déduisent, de la manière la plus rigoureuse, de quelques considérations fort simples, lorsque les forces sont appliquées à un même point ; mais elles deviennent plus difficiles à démontrer, surtout lorsqu'on se propose de les considérer dans toute leur généralité, dès que les forces agissent sur différens points assujettis à des conditions qui contribuent à la destruction mutuelle des forces. La difficulté vient surtout de la nécessité de faire entrer, d'une manière générale, ces conditions dans le calcul. Il semble, au premier aspect, qu'on peut les considérer séparément, et ne supposer d'abord qu'une des conditions, puis une autre, et ainsi de suite ; mais un peu de réflexion fait voir qu'il faudrait alors pouvoir démontrer *à priori*, que les effets produits par la réunion de plusieurs conditions, se composent des effets qui résultent de chaque condition en particulier, sans qu'elles soient modifiées par leur réunion ; vérité qui paraît plutôt devoir être une conséquence des équations de l'équilibre, qu'un moyen de les obtenir.

Une autre simplification qu'on pourrait employer dans la recherche dont nous nous occupons, consiste à supposer successivement tous les points du système fixes, à l'exception de deux d'entre eux, ce qui est d'autant plus commode que, par l'addition des équations ainsi obtenues, on compose précisément avec les dérivées partielles relatives à chaque variable, les dérivées totales dont on a besoin ; mais un exemple très-simple me paraît suffisant pour faire voir que cette supposition n'est pas toujours admissible.

Soient A, B, C, D (*fig. 1.re*), quatre points mobiles le long de la droite AD, libre dans l'espace ; supposons que les points A, B entraînent avec eux, en glissant sur cette droite, deux autres droites EF,

Digitized by Google

EF, GH, perpendiculaires à AB, et dont les parties AE, AF, BG, BH, soient données de longueur; les points C et D étant assujettis à se trouver toujours à l'intersection des droites EGC, FHD, avec la droite AD, il est clair que les rapports des trois distances AB, AC, AD, seront donnés, et qu'en vertu de ces conditions on ne pourra supposer que deux de ces points soient fixes sans que les deux autres ne deviennent complètement immobiles, quoique ces conditions permettent d'ailleurs aux quatre points de se mouvoir à-la-fois en tout sens, et au système qui en résulte, d'être transporté à volonté dans l'espace.

Nous allons donc considérer à-la-fois toutes les conditions auxquelles les points mobiles sont assujettis, et supposer qu'ils sont tous déplacés lorsqu'un mouvement quelconque, compatible avec les conditions données, a lieu dans le système. En supposant tous les points rapportés à trois axes rectangulaires, leur position serait complètement déterminée si toutes leurs coordonnées l'étaient; d'où il suit que le nombre des équations réellement différentes entre elles, résultant des conditions données, ne peut surpasser le nombre des coordonnées diminué d'une unité : mais puisqu'il peut lui être égal, la démonstration ne saurait être générale si elle ne comprenait ce cas. C'est par lui que nous allons commencer; nous verrons ensuite que rien n'est plus facile que d'y ramener tous les cas d'équilibre où le nombre des équations qui expriment les conditions données est inférieur de plusieurs unités à celui des coordonnées de tous les points du système.

Dès qu'on suppose entre les coordonnées autant d'équations réellement différentes entre elles qu'il y a de ces variables, moins une, elles sont toutes données en fonctions d'une d'entre elles, et les points auxquels ces coordonnées appartiennent ne peuvent se mouvoir qu'à la fois et d'une manière déterminée sur des courbes données.

La multiplicité, pour une même coordonnée, des valeurs des fonctions qui expriment ces coordonnées, n'empêche pas que la ligne que chaque point peut décrire sans manquer aux conditions qui déterminent

Digitized by Google

ces fonctions, ne soit unique ; car un point ne peut se mouvoir qu'en restant sur la branche courbe où il est actuellement placé ; et il n'y a à cet égard d'exception que dans le cas où un point mobile se trouverait placé précisément à un point multiple de la courbe que les conditions données l'obligent à décrire. Au reste, ce cas particulier n'exige aucune attention, parce qu'on peut toujours examiner séparément le mouvement que le point pourrait prendre le long de ces diverses branches.

La dépendance mutuelle des points mobiles ne contribue à l'équilibre qu'en ne permettant pas à un des points du système de se mouvoir pour obéir aux forces qui agissent sur lui, sans que d'autres points ne se meuvent de manière à contrarier l'action des forces qui leur sont appliquées. C'est donc relativement aux mouvemens que les points du système peuvent prendre sans manquer aux conditions données, que ces conditions doivent être considérées ; et il est sur-tout important de voir quelles sont les forces qui tendent à produire ces mouvemens, et celles qui y résistent.

Rien n'est plus facile dans le cas où les points ne peuvent se mouvoir que sur des courbes données ; car il est clair qu'une force n'aura aucune action favorable ou contraire à un mouvement quelconque de son point d'application, lorsqu'elle est perpendiculaire à la droite qui touche à ce point la ligne qu'il décrit, et que si cette force est inclinée à cette tangente elle tend à produire ou à empêcher le mouvement, suivant qu'il porte le point du côté où elle fait avec cette tangente un angle aigu, ou du côté opposé. Représentons en général par x, y, z les coordonnées du point d'application M d'une force quelconque P ; $\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, \overset{1}{z}, \overset{2}{x}, \overset{2}{y}, \overset{2}{z}$, &c., représentant en particulier les coordonnées des points $\overset{1}{M}, \overset{2}{M}$, &c., où sont appliquées les forces $\overset{1}{P}, \overset{2}{P}$, &c. ; toutes les coordonnées étant fonctions d'une d'entre elles, on peut, pour mettre de la symétrie dans le calcul, les considérer toutes comme des fonctions d'une autre variable u, prise à volonté, mais liée par une équation à la coordonnée à laquelle

Digitized by Google

toutes les autres étaient d'abord censées rapportées ; et en nommant x', y', z' les dérivées de x, y, z, par rapport à u, on aura

$$x + x'i + \frac{x''}{2} i^2 + \&c.$$

$$y + y'i + \frac{y''}{2} i^2 + \&c.$$

$$z + z'i + \frac{z''}{2} i^2 + \&c.$$

pour les coordonnées du même point dans une autre position ; et si l'on ne prend que les deux premiers termes de ces séries, les quantités

$$x + x'i,$$

$$y + y'i,$$

$$z + z'i,$$

exprimeront les coordonnées d'un point (*) N, placé *(fig. 2)* sur la tangente au point M, du côté où le mouvement porte le point mobile placé en M dans l'état d'équilibre. Si donc on projette sur la direction de la force P la portion de tangente comprise entre les points M, N, cette projection tombera du même côté du point M que la force P, lorsque l'angle entre la tangente et la force est aigu, tandis que la projection et la force tomberont, dans le cas contraire, l'une d'un côté du point M, et l'autre, de l'autre.

Le premier de ces cas est, comme on l'a vu, celui où la force tend à favoriser le mouvement, et le second, celui où elle tend à l'empêcher. Il suit de là que, dans un système assujetti à des conditions continues, deux forces ne peuvent se faire équilibre que dans le cas où l'une tombe

(*) Ce point est précisément celui où arriverait le point mobile, s'il se mouvait pendant toute la durée du déplacement avec la même vîtesse et dans la même direction qu'à l'instant où commence ce déplacement; il serait facile de le démontrer, en partant des principes exposés dans les articles de la *Théorie des fonctions analytiques*, qui sont relatifs à la mécanique ; mais comme cette considération ne change rien aux opérations analytiques qui conduisent aux équations de l'équilibre, je n'ai pas cru devoir m'y arrêter.

Digitized by Google

du même côté de son point d'application que la projection correspondante, et où l'autre tombe de l'autre côté. Il est aisé de trouver l'expression générale de la projection, en nommant a, b, c les coordonnées d'un point quelconque de la direction de la force P, différent du point M, et en considérant le triangle formé par les droites qui joignent les trois points dont les coordonnées sont

$$x, y, z,$$
$$x + x'i, y + y'i, z + z'i,$$
$$a, b, c,$$

et dont les côtés sont

$$\alpha = i\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$
$$\beta = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]},$$
$$\gamma = \sqrt{[(x-a+x'i)^2 + (y-b+y'i)^2 + (z-c+z'i)^2]},$$

ce qui donne pour la projection MQ du premier côté sur le second

$$\frac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{(x-a)x'i + (y-b)y'i + (z-c)z'i}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}}.$$

Cette projection, multipliée par la force P, est ce que nous appellerons le moment de la force P; mais comme on n'a pas besoin des valeurs absolues des momens des forces appliquées au système, mais seulement des rapports qui existent entre eux, nous supprimerons dans leurs expressions le facteur arbitraire i, qui serait commun à tous les momens, et nous aurons

$$P\,\frac{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}},$$

pour le moment de la force P. On peut observer que la quantité qui multiplie P est la fonction prime de la distance

$$\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$$

de son point d'application à celui dont les coordonnées sont a, b, c; cette fonction prime étant prise dans la supposition que ce dernier point est fixe, on pourrait tirer de cette considération une autre définition du moment d'une force qui serait peut-être plus exacte, mais que j'ai évitée

Digitized by Google

lorsque j'ai songé à débarrasser la définition ordinaire du moment de la considération des infiniment petits, de peur qu'elle ne présentât aux commençans une idée trop vague.

De quelque manière, au reste, qu'on définisse cette quantité qu'on appelle moment de la force P, le principe connu sous le nom de principe des vîtesses virtuelles, se réduit à ce que si l'on fait une somme des momens de toutes les forces appliquées au système, en prenant avec des signes contraires, ceux dont les forces et les projections tombent du même côté, et ceux dont les forces et les projections tombent de côtés opposés (*); que l'on ajoute à cette somme celle des équations déduites de toutes les conditions données, multipliées chacune par un facteur arbitraire, et réduites à contenir dans tous leurs termes les dérivées x', y', z', à la première puissance (**); qu'on égale séparément à zéro les quantités qui multiplient chaque dérivée, et qu'on élimine tous les facteurs arbitraires, l'équation ou les équations restantes exprimeront toutes les conditions de l'équilibre.

Dans le cas que nous examinons d'abord, le nombre des équations de condition, et par conséquent celui des facteurs arbitraires, n'étant inférieur que d'une unité à celui des variables, on n'obtiendra de cette manière qu'une équation; mais elle suffira, réunie aux équations de condition, pour déterminer toutes les inconnues; car il ne faut pas regarder comme telle la variable u, à laquelle toutes les autres sont supposées rapportées, et qui, n'influant que sur la valeur absolue des

---

(*) J'aurais abrégé cet énoncé, si j'avais fixé les signes + et — à ces deux sortes de momens, mais j'aurais cru devoir appeler *positifs* ceux dont les deux facteurs tombent du même côté du point d'application, qui sont en même temps ceux dont les forces ont une action positive pour produire le mouvement que l'on considère. J'ai vu que c'était au contraire ces momens que quelques auteurs appelaient *négatifs*. Je n'ai d'ailleurs pris aucun parti à ce sujet.

(**) Quelquefois ces équations sont immédiatement données sous cette forme; elles le sont plus souvent en fonctions des coordonnées, et alors il ne s'agit que de prendre les dérivées. Si ces équations au contraire contenaient des dérivées d'ordres supérieurs, il faudrait d'abord remonter à leur primitive du premier ordre.

Digitized by Google

dérivées, n'entre pour rien dans les résultats, toujours indépendans de cette valeur. Il en est, dans le calcul des fonctions, de cette variable, comme de l'unité dans les équations homogènes de l'application de l'algèbre à la géométrie; celle-ci est une ligne essentiellement indéterminée, et on est cependant obligé d'y avoir recours pour donner un sens aux symboles qu'on emploie lorsque le nombre des dimensions surpasse trois unités.

Lorsque le nombre des équations de condition est inférieur de plusieurs unités à celui des variables, ce sont autant de variables indépendantes dont on est obligé de supposer que toutes les autres sont fonctions; et pour donner de la symétrie et de la régularité au calcul, il faut que ces variables ne fassent point partie de celles que l'on considère dans le problème, et qu'elles restent toutes arbitraires : en les faisant varier toutes à-la-fois, et en représentant leurs accroissemens par μi, νi, &c., les seconds termes des séries trouvées ci-dessus, qui se composent des termes où ces accroissemens ne sont qu'au premier degré, pourront toujours être représentés par $x'i$, $y'i$, $z'i$, en donnant à x', y', z', des valeurs convenables.

Au reste, les considérations nécessaires pour éclaircir complètement cette partie de l'analyse mathématique, sont étrangères à l'objet de ce mémoire, puisqu'il n'y a qu'une variable indépendante dans le cas que nous avons d'abord à considérer, et que ceux où il y en a un plus grand nombre seront ramenés à ce premier cas, d'une manière qui ne dépend pas des valeurs représentées par x, y, z; ces valeurs disparaissant dès le commencement du calcul, et ne servant qu'à distinguer les colonnes qu'il faut égaler séparément à zéro.

Nous tirerons la démonstration du principe de vîtesses virtuelles dans le premier de ces deux cas, de ce que les points mobiles ne pouvant que glisser le long de courbes données, si l'on décompose la force appliquée à un point mobile, en une force perpendiculaire à la droite qui touche à ce point la ligne qu'il décrit, et une force dirigée suivant cette tangente, cette dernière agira seule pour le maintien de l'équilibre;

Digitized by Google

d'où il suit que deux forces qui, décomposées de cette manière, donnent la même force suivant la tangente, peuvent être substituées l'une à l'autre sans qu'il en résulte aucun changement dans l'état d'équilibre ou de mouvement du système, quelle que soit d'ailleurs la valeur de la force perpendiculaire qui est détruite.

Pour que cette force, suivant la tangente, soit la même dans les deux cas, il faut, d'après les lois connues de la décomposition des forces, que les produits des forces ainsi décomposées par les cosinus des angles qu'elles forment avec la tangente, soient égaux.

Soit *m (fig. 3.)* le point d'application de la force *P;* si l'on unit ce point par une droite inflexible et inextensible à un autre point *M*, qui soit assujetti à se mouvoir sur une ligne qu'on peut prendre à volonté, droite, à simple ou à double courbure, on pourra toujours substituer à la force *P* une force *R* appliquée à ce point *M*, et dirigée comme on le voudra. Il suffira pour cela de donner à la force *R* une valeur telle qu'en la décomposant en une force perpendiculaire à la droite qui touche en *M* la courbe que décrit ce point, et en une autre force que nous nommerons *Q*, qui soit dirigée suivant la droite *M m*, et dont l'action se transmette sans altération en *m*, en vertu de l'inflexibilité et de l'inextensibilité de cette droite, on ait le produit de cette dernière force, par le cosinus de l'angle *M m t* que *M m* fait avec la tangente en *m*, égal au produit de la force *P* par le cosinus de l'angle *P m t* que sa direction forme avec la même tangente. La résultante *R*, et sa composante *Q*, doivent être en raison inverse des cosinus des angles compris entre leurs directions et cette tangente; d'où il suit que la valeur qu'il faut donner à la force *R* pour qu'elle puisse être substituée à la force *P*, est déterminée par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} P \cos.\ P\ m\ t &= Q \cos.\ Q\ m\ t, \\ R \cos.\ R\ M\ T &= Q \cos.\ Q\ M\ T, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [A],$$

qui donnent, après qu'on a éliminé *Q*, le rapport des deux forces *P*, *R*, et déterminent par conséquent la valeur de *R*, puisque *P* est connu.

Digitized by Google

Si nous désignons par x, y, z, X, Y, Z, les coordonnées de leurs points d'application, et par a, b, c, A, B, C, celles d'autres points pris sur leurs directions, la projection de la portion de la tangente en m qui est représentée par

$$i\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

sur la direction de la force P, étant égale à

$$\frac{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}}\, i,$$

le cosinus de l'angle compris Pmt, sera

$$\frac{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}\cdot\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}};$$

on trouvera de même

$$\cos. Mmt = \frac{(x-X)x' + (y-Y)y' + (z-Z)z'}{\sqrt{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]}.\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}},$$

et les cosinus des angles RMT, mMT, s'obtiendront avec la même facilité. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations [A], qu'on les multiplie respectivement par

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

et par

$$\sqrt{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)},$$

et qu'on retranche la première de la seconde, on aura

$$R\frac{(X-A)X' + (Y-B)Y' + (Z-C)Z'}{\sqrt{[(X-A)^2 + (Y-B)^2 + (Z-C)^2]}} - P\frac{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}} =$$

$$- Q\frac{(x-X)(x'-X') + (y-Y)(y'-Y') + (z-Z)(z'-Z')}{\sqrt{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]}};$$

mais la longueur $\sqrt{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]}$, de la droite mM ne variant pas lorsque les coordonnées changent de valeur, sa dérivée qui multiplie Q dans le second membre de cette équation, est nécessairement nulle, on a donc

$$R\frac{(X-A)X' + (Y-B)Y' + (Z-C)Z'}{\sqrt{[(X-A)^2 + (Y-B)^2 + (Z-C)^2]}} = P\frac{(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}};$$

c'est-à-dire, que pour que les forces P, R, tendent à mouvoir le point

Digitized by Google

point m, l'une immédiatement, l'autre au moyen de la droite $M\,m$, précisément de la même manière, et puissent être substituées l'une à l'autre, il faut que leurs momens soient égaux.

Comme nous avons employé les cosinus des angles que les directions des forces R, Q font avec la tangente M, à la place des sinus des angles qu'elles forment avec la normale, et que les signes des cosinus changent dans d'autres circonstances que ceux des sinus; on pourrait penser que l'égalité des momens des forces P, R, n'est relative qu'à leurs valeurs absolues; mais on s'assure bientôt que ces momens doivent être de même signe; puisque ces deux forces devant produire le même effet lorsqu'on les substitue l'une à l'autre, il faut qu'elles tendent à favoriser ou à empêcher les mêmes mouvemens, ce qui ne peut être sans que leurs momens ne soient de même signe.

On démontrera de même que si μ est un troisième point retenu sur une ligne quelconque, et uni au point M, par une droite inflexible et inextensible $\mu\,M$, on pourra toujours, sans qu'il en résulte aucun changement dans l'état du système, substituer à la force R, et par conséquent à la force P, une force S appliquée à ce nouveau point, et dirigée comme on le voudra, pourvu que son moment soit égal à celui de R, c'est-à-dire, à celui de la force P.

On pourrait continuer la même transformation pour obtenir de nouvelles forces équivalentes à P; mais ce que nous venons de dire suffira pour montrer qu'on peut toujours, en appliquant successivement cette transformation à tous les points mobiles, changer tout système dans lequel le nombre des équations de condition n'est inférieur que d'une unité à celui des coordonnées, en un autre système d'autant de forces et de points, mais dont les forces soient dirigées comme on le voudra, et les points mobiles retenus sur des lignes prises à volonté, de manière, 1.° que si l'équilibre a lieu dans un système, il subsistera aussi dans l'autre, et réciproquement, puisque les forces peuvent

Digitized by Google

être substituées l'une à l'autre sans qu'il en résulte aucun changement dans l'état du système;

2.° Que la somme des momens sera la même dans les deux systèmes, puisqu'il y a par-tout égalité entre les momens des forces correspondantes. Il y a un cas où la loi de l'équilibre est évidente dans un système de forces appliquées à des points qui ne peuvent se mouvoir qu'à-la-fois, d'une manière déterminée; c'est lorsque les conditions sont telles, qu'elles ne permettent à ces points que de glisser en même temps, et sans changer leurs distances mutuelles, le long d'une droite, suivant laquelle sont dirigées les forces qui leur sont appliquées. L'équilibre exige alors que la somme de ces forces, en prenant, avec des signes contraires, celles qui agissent en sens opposés, soit égale à zéro; et si cette condition a lieu, l'équilibre s'ensuit nécessairement. En effet, quel que soit alors l'assemblage de points fixes, de lignes droites ou courbes, de machines quelconques qui établissent cette espèce de dépendance entre les points mobiles, il est évident, puisqu'elle rend constantes leurs distances mutuelles, qu'on ne changerait rien à l'état du système si l'on unissait tous ces points par une droite inflexible et inextensible; et, par la même raison, s'ils étaient d'abord unis par cette droite, et qu'on y joignît les autres conditions, l'état du système n'éprouverait encore aucun changement. Étant donc le même, soit que ces deux liaisons existent à-la-fois, ou qu'une seule d'entre elles ait lieu, il ne pourra y avoir de différence entre le cas où les points mobiles sont unis seulement par la première, et celui où ils le sont seulement par la seconde. Mais lorsque les points sont unis par la droite inflexible, la condition de l'équilibre est que la somme des forces soit nulle. Cette condition sera donc aussi celle de l'équilibre lorsque les points seront liés par les autres conditions. Pour ramener un système quelconque à un système tel que celui que nous venons de décrire, nous prendrons à volonté une droite *AB (fig. 4)*, que nous considérerons, pour plus de simplicité, comme l'axe des abscisses, et nous supposerons sur cette droite autant de points mobiles qu'il y en a dans le système donné; joignant alors chaque point *m* de

Digitized by Google

ce dernier système à un point μ mobile le long de AB, par deux droites inflexibles et inextensibles mM, $M\mu$ (*), dont les extrémités soient unies en M, de manière à tourner librement l'une sur l'autre, on imprimera au système le mouvement qu'il peut prendre en vertu des conditions données, et on fera mouvoir les points μ le long de AB, sans changer leurs distances mutuelles. Si on retient en même temps le point M dans un plan quelconque, celui des x, y, par exemple, il y tracera une ligne qui dépendra de la nature du système ; et en assujettissant tous les points M à ne se mouvoir que sur les lignes ainsi déterminées, les points μ ne pourront, en vertu de la liaison que cette condition établira entre eux et les points du système donné, et de la dépendance qui existait déjà entre ceux-ci, se mouvoir qu'à-la-fois et sans changer leurs distances mutuelles : d'où il suit que si l'on transforme le système donné en forces $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}$, $\overset{3}{S}$.....$\overset{n}{S}$, appliquées à ces points μ, et dirigées suivant l'axe AB, la condition de l'équilibre sera

$$\overset{1}{S} + \overset{2}{S} + \overset{3}{S} + \ldots \overset{n}{S} = 0.$$

Or si ξ, η, ζ désignaient les coordonnées du point d'application de la force S qu'on substitue à P, et α, β, γ, les coordonnées d'un autre point de sa direction, on aurait, comme on a vu, l'équation

$$P\frac{(x-a)x'+(y-b)y'+(z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}} = S\frac{(\xi-\alpha)\xi'+(\eta-\beta)\eta'+(\zeta-\gamma)\zeta'}{\sqrt{[(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2]}}$$

pour déterminer la valeur de S.

Ici $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, puisque les points dont ces lettres représentent les coordonnées sont dans l'axe; ce qui réduit l'équation précédente à

$$P\frac{(x-a)x'+(y-b)y'+(z-c)z'}{\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}} = S\xi'.$$

(*) Comme on est le maître de donner à ces lignes la longueur qu'on veut, on peut toujours faire en sorte qu'elles ne rencontrent à angle droit aucune des lignes sur lesquelles leurs extrémités doivent se mouvoir, ce qui introduirait quelques difficultés dans la démonstration, en rendant infinie la force que l'on substitue à la force P.

Digitized by Google

Une équation semblable ayant lieu entre chacune des forces P et sa correspondante S, on pourra additionner toutes ces équations, et on obtiendra, en faisant attention que les distances entre les points mobiles le long de AB étant constantes, ξ' a la même valeur pour tous ces points,

$$\overset{\text{I}}{P}\frac{(\overset{\text{I}}{x}-\overset{\text{I}}{a})\overset{\text{I}}{x'}+(\overset{\text{I}}{y}-\overset{\text{I}}{b})\overset{\text{I}}{y'}+(\overset{\text{I}}{z}-\overset{\text{I}}{c})\overset{\text{I}}{z'}}{\sqrt{[(\overset{\text{I}}{x}-\overset{\text{I}}{a})^2+(\overset{\text{I}}{y}-\overset{\text{I}}{b})^2+(\overset{\text{I}}{z}-\overset{\text{I}}{c})^2]}}+\overset{\text{II}}{P}\frac{(\overset{\text{II}}{x}-\overset{\text{II}}{a})\overset{\text{II}}{x'}+(\overset{\text{II}}{y}-\overset{\text{II}}{b})\overset{\text{II}}{y'}+(\overset{\text{II}}{z}-\overset{\text{II}}{c})\overset{\text{II}}{z'}}{\sqrt{[(\overset{\text{II}}{x}-\overset{\text{II}}{a})^2+(\overset{\text{II}}{y}-\overset{\text{II}}{b})^2+(\overset{\text{II}}{z}-\overset{\text{II}}{c})^2]}}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\overset{\text{n}}{P}\frac{(\overset{\text{n}}{x}-\overset{\text{n}}{a})\overset{\text{n}}{x'}+(\overset{\text{n}}{y}-\overset{\text{n}}{b})\overset{\text{n}}{y'}+(\overset{\text{n}}{z}-\overset{\text{n}}{c})\overset{\text{n}}{z'}}{\sqrt{[(\overset{\text{n}}{x}-\overset{\text{n}}{a})^2+(\overset{\text{n}}{y}-\overset{\text{n}}{b})^2+(\overset{\text{n}}{z}-\overset{\text{n}}{c})^2]}}=(\overset{\text{I}}{S}+\overset{\text{II}}{S}+\ldots\ldots+\overset{\text{n}}{S})\xi'.$$

Mais il faut, pour l'équilibre, que

$$\overset{\text{I}}{S}+\overset{\text{II}}{S}+\ldots\ldots+\overset{\text{n}}{S}=0,$$

et réciproquement quand cette condition a lieu, le système des forces S, et par conséquent celui des forces P est nécessairement en équilibre; ainsi donc, en vertu de l'équation que nous venons d'obtenir, on a pour la seule condition nécessaire à l'équilibre du système donné, la somme des momens des forces P, qui compose le premier membre de cette équation, égale à zéro.

Les dérivées qui entrent dans cette équation y ayant été introduites comme déterminant les directions des tangentes aux lignes sur lesquelles les points mobiles sont retenus en vertu des équations de condition, il faudra, pour les faire disparaître, diviser toute l'équation par l'une d'entre elles, $\overset{\text{I}}{x'}$, par exemple, et subsituer aux fractions $\frac{\overset{\text{I}}{y'}}{\overset{\text{I}}{x'}}$, $\frac{\overset{\text{I}}{z'}}{\overset{\text{I}}{x'}}$, $\frac{\overset{\text{II}}{x'}}{\overset{\text{I}}{x'}}$, &c. leurs valeurs tirées de ce que les conditions auxquelles le système est assujetti, donnent en fonction de $\overset{\text{I}}{x}$ toutes les autres variables, et par conséquent leurs fonctions dérivées par raport à $\overset{\text{I}}{x}$, qui sont exprimées par ces fractions. Or, c'est un théorème d'algèbre aisé à démontrer,

Digitized by Google

que l'équation résultant de cette élimination est identiquement la même que celle qu'on obtiendrait en ajoutant à la somme des momens les équations de condition multipliées par des facteurs arbitraires, en égalant séparément à zéro les quantités qui multiplient chaque dérivée, et en éliminant les facteurs (*). L'équation que donne ce dernier procédé, est donc, comme nous nous étions proposé de le démontrer, la seule condition nécessaire à l'équilibre dans le cas que nous venons d'examiner. Reste à démontrer que le même procédé conduit encore aux équations de l'équilibre, dans le cas où le nombre des équations de condition est inférieur de plus d'une unité à celui des variables. Représentons par $m + n$ le nombre des coordonnées des points mobiles, et par m celui des équations qui résultent des conditions données; il faudra prouver qu'après avoir ajouté ces équations multipliées par des facteurs arbitraires à la somme des momens, et avoir égalé chaque colonne à zéro, ce qui donnera $m + n$ équations, et m arbitraires, les n équations qui resteront après l'élimination de ces arbitraires auront nécessairement lieu dans le cas de l'équilibre, et que réciproquement, si ces équations sont satisfaites, les forces appliquées au système se détruiront mutuellement; car d'abord il est évident que si le système est en équilibre d'après les conditions données, et qu'on suppose les points mobiles assujettis à ces conditions, et à de nouvelles dépendances compatibles avec elles, l'équilibre ne sera point troublé, puisque de nouvelles dépendances entre des points soumis à des forces qui se détruisent mutuellement en vertu de certaines conditions, ne peuvent les empêcher de se détruire tant que ces conditions subsistent. Supposons

(*) On ne doit point, dans le cas dont il est ici question, regarder ces opérations comme une manière de faciliter l'élimination, puisqu'on a par les deux procédés le même nombre d'inconnues à éliminer; le dernier n'est préférable que parce qu'il conduit à la connaissance des réactions mutuelles des points mobiles : mais cet avantage est trop important pour ne pas faire, du procédé qui nous le procure, l'objet principal de la démonstration du principe des vîtesses virtuelles; c'est ce qui m'a engagé à démontrer l'identité du résultat auquel il conduit, et de celui que donne l'autre mode d'élimination. *Voyez* à la suite de ce Mémoire la note I.re

Digitized by Google

donc qu'on joigne aux m équations de condition données $n - 1$ autres équations de condition prises à volonté, et que nous nommerons *limitations arbitraires*, qui ne soient ni incompatibles ni identiques avec les premières; toutes les coordonnées deviendront fonctions d'une d'entre elles, et l'équilibre subsistant toujours quelles que soient ces nouvelles conditions, l'équation de l'équilibre, calculée pour ce cas par le procédé que nous venons de démontrer, devra avoir lieu pour toutes les limitations arbitraires. Mais c'est encore un théorème de pur algèbre (*), que cette équation ne peut être satisfaite, quelles que soient ses limitations, à moins que les n équations qui auraient résulté de l'élimination, dans le cas où l'on n'aurait ajouté à la somme de momens que les équations de condition données, n'aient lieu séparément; l'équilibre ne pourra donc subsister dans le système, que dans le cas où ces n équations seront satisfaites.

La proposition réciproque de ce théorème d'algèbre étant également vraie, et ces équations ne pouvant avoir lieu sans rendre identique l'équation de l'équilibre calculée pour des limitations arbitraires quelconques, il s'ensuivra que toutes les fois qu'on aura satisfait à ces n équations, l'équilibre aura lieu quelles que soient les limitations arbitraires ajoutées aux conditions données, et il ne s'agit plus que de faire voir que cela ne peut être, à moins que l'équilibre n'ait déjà lieu indépendamment de ces limitations, en vertu des seules conditions données. Supposons, pour un moment, que ces conditions ne suffisent pas à l'équilibre; il s'ensuivra que quand elles seront les seules auxquelles les points mobiles soient assujettis, ils prendront, en vertu des forces qui y sont appliquées, un mouvement dont toutes les circonstances seront déterminées par les valeurs et les directions de ces forces, et par les conditions données. Les arcs décrits à-la-fois par ces différens points étant déterminés, toutes les coordonnées deviendront fonctions d'une d'entre elles, et parmi les équations qui donneront ces fonctions, se trouveront

(*) *Voyez* note II.

Digitized by Google

les m équations de condition données; car puisque nous ne cherchons que les lois de l'équilibre qui sont nécessairement indépendantes du temps, nous pouvons toujours supposer que ces conditions continueront d'avoir lieu pendant tout le mouvement que prendra le système, précisément comme elles ont lieu à l'instant de l'équilibre; il y aura en outre $n - 1$ autres équations qui ne pourront être ni identiques ni incompatibles avec les premières, puisqu'elles représentent conjointement avec elles les mouvemens déterminés que les points sont sensés prendre réellement. Or, quoique ces $n - 1$ équations soient inconnues, il suffit qu'elles existent pour qu'on puisse supposer qu'elles ont été prises pour limitations arbitraires; alors il est évident que ces limitations ne changeront rien à l'état du système, et qu'il devra se mouvoir, lorsqu'on joint ces nouvelles dépendances entre les points mobiles, aux conditions données, précisément comme il était supposé se mouvoir lorsqu'il n'était assujetti qu'à ces seules conditions. Le système ne resterait donc pas en équilibre pour toutes les limitations arbitraires et compatibles avec ces conditions, ce qui est contraire à ce qui vient d'être démontré, et il faut par conséquent que le système soit en équilibre en vertu des seules conditions données.

Notes relatives à la démonstration des Théorèmes algébriques sur lesquels est appuyée la démonstration précédente.

Note I.re

Si nous représentons, pour abréger, la somme des momens par

$$E\overset{1}{x}' + F\overset{1}{y}' + G\overset{1}{z}' + H\overset{2}{x}' + I\overset{2}{y}' + \&c = 0,$$

les équations de condition par

$$e\overset{1}{x}' + f\overset{1}{y}' + g\overset{1}{z}' + h\overset{2}{x}' + i\overset{2}{y}' + \&c. = 0,$$

$$k\overset{1}{x}' + l\overset{1}{y}' + m\overset{1}{z}' + n\overset{2}{y}' + p\overset{2}{y}' + \&c. = 0,$$

&c. &c.

Digitized by Google

et leurs facteurs par q, r, &c., nous aurons l'équation

$$\left.\begin{aligned} & E + .F\,\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + G\,\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + \&c. \\ + e\,q + f\,q\,\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + g\,q\,\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + \&c. \\ + k\,r + l\,r\,\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + m\,r\,\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + \&c. \\ + \&c.\ \&c. \end{aligned}\right\} = 0 \ldots [\mathrm{B}].$$

Et il faudra démontrer qu'on a identiquement la même quantité, soit qu'on substitue dans sa première ligne les valeurs de $\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'}$, $\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'}$, &c., tirées des autres lignes égalées à zéro, ou qu'on substitue dans sa première colonne les valeurs de q, r, &c., déduites des équations que donnent les autres colonnes égalées à zéro.

Cette première ligne et cette première colonne contenant également le terme E, il suffit de démontrer que la fonction de e, k, &c., F, f, l, &c., G, g, m, &c., dans laquelle se change

$$F\,\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + G\,\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + \&c.,$$

par la première opération, est identique à la fonction des mêmes quantités dans laquelle se change

$$e\,q + k\,r + \&c.$$

lors de la seconde.

Pour cela, observons que si l'on substitue à-la-fois, à la place de $\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'}$, $\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'}$ &c., et de q, r, &c., leurs valeurs déterminées, comme nous venons de le dire, toutes les lignes et toutes les colonnes, excepté la première ligne et la première colonne, deviendront identiques; par conséquent

$$F\,\frac{{}^{\mathrm{I}}y'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + G\,\frac{{}^{\mathrm{I}}z'}{{}^{\mathrm{I}}x'} + \&c,$$

qui

Digitized by Google

qui ne contient d'inconnues que $\frac{{}^{\text{I}}y'}{{}^{\text{I}}x'}$, $\frac{{}^{\text{I}}z'}{{}^{\text{I}}x'}$, &c., deviendra, par la substitution de leurs valeurs, identique à ce que devient le reste des mêmes colonnes, pris avec des signes contraires,

$$\left.\begin{array}{l} -fq\,\frac{{}^{\text{I}}y'}{{}^{\text{I}}x'} - gq\,\frac{{}^{\text{I}}z'}{{}^{\text{I}}x'} - \text{&c.} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -lr\,\frac{{}^{\text{I}}y'}{{}^{\text{I}}x'} - mr\,\frac{{}^{\text{I}}z'}{{}^{\text{I}}x'} - \text{&c.} \\ -\ \text{&c.}\quad\ \text{&c.} \end{array}\right\} [C],$$

lorsqu'on y substitue à-la-fois les valeurs de $\frac{{}^{\text{I}}y'}{{}^{\text{I}}x'}$, $\frac{{}^{\text{I}}z'}{{}^{\text{I}}x'}$, &c., et de q, r, &c.; par la même raison

$$eq + kr + \text{&c.},$$

qui ne contient que les inconnues q, r, &c., se change aussi lorsqu'on y substitue les valeurs inconnues, dans ce que devient la quantité $[C]$, par la substitution simultanée des valeurs de $\frac{{}^{\text{I}}y'}{{}^{\text{I}}x'}$, $\frac{{}^{\text{I}}z'}{{}^{\text{I}}x'}$, &c., et de q, r, &c.; d'où résulte évidemment l'identité des valeurs que ces opérations donnent pour

$$F\frac{{}^{\text{I}}y'}{{}^{\text{I}}x'} + G\frac{{}^{\text{I}}z'}{{}^{\text{I}}x'} + \text{&c.},$$

et pour

$$eq + kr + \text{&c.}$$

NOTE II.

REPRÉSENTONS les équations qui résultent des limitations arbitraires, par

$$\varepsilon\,{}^{\text{I}}x' + \zeta\,{}^{\text{I}}y' + \varkappa\,{}^{\text{I}}z' + 6\,{}^{\text{II}}x' + \iota\,{}^{\text{II}}y' + \text{&c.} = 0,$$

$$\varkappa\,{}^{\text{I}}x' + \lambda\,{}^{\text{I}}y' + \mu\,{}^{\text{I}}z' + \nu\,{}^{\text{II}}x' + \xi\,{}^{\text{II}}y' + \text{&c.} = 0,$$

&c., &c.

Digitized by Google

et les facteurs arbitraires qui doivent les multiplier, par π, ϱ, &c. après avoir formé l'équation

$$\left.\begin{array}{l} E^{\prime}x^{\prime} + F^{\prime}y^{\prime} + G^{\prime}z^{\prime} + H^{\prime}x^{\prime} + I^{\prime}y^{\prime} + \&c. \\ + eqx^{\prime} + fqy^{\prime} + gqz^{\prime} + hqx^{\prime} + iqy^{\prime} + \&c. \\ + krx^{\prime} + lry^{\prime} + mrz^{\prime} + nrx^{\prime} + pry^{\prime} + \&c. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \iota\pi x^{\prime} + \zeta\pi y^{\prime} + \varkappa\pi z^{\prime} + \vartheta\pi x^{\prime} + \iota\pi y^{\prime} + \&c. \\ + \varkappa\varrho x^{\prime} + \lambda\varrho y^{\prime} + \mu\varrho z^{\prime} + \nu\varrho x^{\prime} + \xi\varrho y^{\prime} + \&c. \\ + \&c., \&c. \end{array}\right\} = 0,$$

il faudra démontrer que l'équation qu'on obtient en éliminant toutes les arbitraires q, r, &c., π, ϱ, &c., après avoir égalé chaque colonne à zéro, ne peut avoir lieu, quelles que soient les limitations arbitraires, à moins que les n équations qui résulteraient de la même élimination faite en n'ajoutant à la somme des momens que les équations de condition données, ne soient satisfaites. N'éliminons d'abord que les m inconnues q, r, &c., au moyen des m dernières équations, que nous représenterons, après avoir transposé tous les termes où ces inconnues n'entrent pas, par

$$\left.\begin{array}{l} hq + nr + \&c. = -H - \vartheta\pi - \nu\varrho - \&c. \\ iq + pr + \&c. = -I - \iota\pi - \xi\varrho - \&c. \\ \&c., \&c. \end{array}\right\} [D];$$

les valeurs de q, r, &c., auront, d'après les formules de la résolution générale des équations du premier degré, pour dénominateur commun une fonction de leurs coëfficiens h, n, &c., i, p, &c., qui sont entièrement connus, puisque ce sont les différens termes des équations de condition données, et les numérateurs seront formés par des fonctions des mêmes quantités multipliées par les seconds membres des équations $[D]$; en sorte que si l'on représente par (*)

$$-\bar{q}, -\bar{\bar{q}}, \&c.,$$

les quotiens qu'on obtient en divisant par le dénominateur commun celles de ces fonctions qui entrent dans le numérateur de q, par

$$-\bar{r}, -\bar{\bar{r}}, \&c.,$$

(*) Je donne le signe — à ces symboles, pour les éviter dans les valeurs de q, r, &c., où ils ne feraient qu'embarrasser le calcul, sans rien changer aux résultats.

Digitized by Google

ceux qu'on obtient en divisant de même les fonctions de h, s, &c., i, p, &c., qui entrent dans le numérateur de r, et ainsi de suite, on aura

$$q = \bar{q}(H + \theta\pi + \rho\varrho + \text{&c.}) + \bar{\bar{q}}(I + \iota\pi + \xi\varrho + \text{&c.}) + \text{&c.}$$

$$r = \bar{r}(H + \theta\pi + \rho\varrho + \text{&c.}) + \bar{\bar{r}}(I + \iota\pi + \xi\varrho + \text{&c.}) + \text{&c.}$$

&c., &c.

L'avantage de cette notation est de présenter en même temps les valeurs des mêmes facteurs arbitraires, dans le cas où l'on n'aurait ajouté à la somme des momens que les seules conditions données; car alors les seconds membres des équations $[D]$ se réduiraient à $-H$, $-I$, &c., sans que leurs premiers membres éprouvassent aucun changement, et on aurait

$$q = \bar{q}H + \bar{\bar{q}}I + \text{&c.}$$

$$r = \bar{r}H + \bar{\bar{r}}I + \text{&c.}$$

&c., &c.

Reprenons les valeurs que nous avons trouvées d'abord pour q, r, &c., et substituons-les dans les n équations non encore employées,

$$E + eq + kr + \text{&c.} + \iota\pi + \varkappa\varrho + \text{&c.} = 0,$$

$$F + fq + lr + \text{&c.} + \zeta\pi + \lambda\varrho + \text{&c.} = 0,$$

&c., &c.

elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} E + e\bar{q}H + e\bar{\bar{q}}I + \text{&c.} + k\bar{r}H + k\bar{\bar{r}}I + \text{&c.} \\ + \pi(\iota + e\bar{q}\theta + e\bar{\bar{q}}\iota + \text{&c.} + k\bar{r}\theta + k\bar{\bar{r}}\iota + \text{&c.}) \\ + \varrho(\varkappa + e\bar{q}\rho + e\bar{\bar{q}}\xi + \text{&c.} + k\bar{r}\rho + k\bar{\bar{r}}\xi + \text{&c.}) \\ + \text{&c., &c.} \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} F + f\bar{q}H + f\bar{\bar{q}}I + \text{&c.} + l\bar{r}H + l\bar{\bar{r}}I + \text{&c.} \\ + \pi(\zeta + f\bar{q}\theta + f\bar{\bar{q}}\iota + \text{&c.} + l\bar{r}\theta + l\bar{\bar{r}}\iota + \text{&c.}) \\ + \varrho(\lambda + f\bar{q}\rho + f\bar{\bar{q}}\xi + \text{&c.} + l\bar{r}\rho + l\bar{\bar{r}}\xi + \text{&c.}) \\ + \text{&c., &c.} \end{array}\right\} = 0,$$

Il ne s'agira plus que de substituer dans la première, les valeurs de π, ϱ, &c., tirées des $n - 1$ autres, pour avoir l'équation qui doit être satisfaite, quelques valeurs

Digitized by Google

qu'on donne aux termes ϵ, θ, ι, &c. $\varkappa$, ν, ξ, &c. des limitations arbitraires : or il faut pour cela que les valeurs ainsi trouvées pour π, ϱ, &c., et les termes

$$E + \bar{eq}H + \bar{\bar{eq}}I + \&c. + \bar{kr}H + \bar{\bar{kr}}I + \&c.$$

de cette équation, et où ces valeurs n'entrent pas, s'évanouissent séparément ; car si le facteur π, par exemple, n'était pas nul, on n'aurait qu'à prendre successivement pour une des limitations arbitraires,

$$\epsilon x' + \zeta y' + \varkappa z' + \&c. = 0,$$

et, pour une autre,

$$(\epsilon + C)x' + \zeta y' + \varkappa z' + \&c. = 0,$$

C étant une quantité que nous supposerons constante, pour que ces deux limitations arbitraires soient à-la-fois des dérivées exactes, et qu'on peut choisir à volonté, pourvu que la valeur particulière qu'on lui donne ne rende infinie aucune des fonctions qui expriment toutes les coordonnées en une seule d'entre elles ; alors le terme ϵ n'entrant point dans les $n - 1$ équations d'où l'on tire les valeurs des facteurs arbitraires pour les substituer dans la première équation, et ne se trouvant que dans le terme $\epsilon\pi$ de celles-ci, l'équation résultante de l'élimination contiendrait le terme $C\pi$ de plus, lorsqu'on prendrait la seconde limitation arbitraire au lieu de la première ; et cette équation ne pourrait avoir lieu dans les deux cas.

On démontrerait de même que ϱ est séparément nul en considérant le terme $\varkappa\varrho$, et ainsi de suite. L'élimination de ces facteurs arbitraires, dans la première équation, se réduira donc à effacer tous les termes où ils entrent, et on aura

$$E + \bar{eq}H + \bar{\bar{eq}}I + \&c. + \bar{kr}H + \bar{\bar{kr}}I + \&c. = 0,$$

pour une des équations de l'équilibre ; et comme les valeurs de π, ϱ, &c., tirées des $n - 1$ autres équations, doivent être nulles, il faudra encore que celles-ci soient satisfaites en y substituant 0 à la place de ces facteurs ; ce qui donne

$$F + \bar{fq}H + \bar{\bar{fq}}I + \&c. + \bar{lr}H + \bar{\bar{lr}}I + \&c. = 0,$$

&c., &c.

Si l'on se rappelle maintenant que

$$\bar{q}H + \bar{\bar{q}}I + \&c.$$
$$\bar{r}H + \bar{\bar{r}}I + \&c.$$

sont les valeurs de q, r, &c. dans le cas où l'on n'ajoute à la somme des momens que les équations de condition données, on verra aisément que les n équations

Digitized by Google

que nous venons d'obtenir sont précisément celles que nous nous étions proposé de démontrer, c'est-à-dire, celles où l'on est conduit lorsqu'on élimine q, r, &c. des équations qu'on trouve en n'ajoutant à la somme des momens que les équations de condition données.

Quant à la proposition inverse de ce théorème, que si ces n équations sont satisfaites, l'équation qui résulte de l'élimination faite en ajoutant aussi les limitations arbitraires, a lieu, quelles que soient ces limitations, elle résulte évidemment du calcul précédent; car il fait voir que le premier membre de cette dernière équation ne contient que la quantité

$$E + e\bar{q}H + e\bar{\bar{q}}I + \&c. + \varkappa\bar{r}H + \varkappa\bar{\bar{r}}I + \&c. = 0,$$

qui est nulle par supposition, et des termes multipliés par les valeurs de π, ϱ, &c. tirées des équations

$$\left.\begin{array}{l} F + \bar{q}H + f\bar{\bar{q}}I + \&c. + \bar{r}H + \bar{\bar{r}}I + \&c. \\ + \pi(\zeta + f\bar{q}\theta + f\bar{\bar{q}}\iota + \&c. + \bar{r}\theta + \bar{\bar{r}}\iota + \&c.) \\ + \varrho(\lambda + f\bar{q}\nu + f\bar{\bar{q}}\xi + \&c. + \bar{r}\nu + \bar{\bar{r}}\xi + \&c.) \\ + \&c. + \&c. \end{array}\right\} = 0,$$

&c. &c.

qui donnent

$$\pi = 0,$$
$$\varrho = 0, \&c.$$

puisque les termes où ces inconnues n'entrent pas, et qui doivent se trouver dans tous les produits dont se composent les numérateurs de leurs valeurs, sont nuls.

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Formules pour passer d'un Système de coordonnées rectangulaires à un Système de coordonnées obliques;

Par M. LIVET, Répétiteur à l'École polytechnique.

SOIENT AB, AC et AD les axes rectangulaires des x, y et z; soient ensuite AB', AC', AD', les axes relatifs aux nouvelles coordonnées x', y', z': on demande, pour un point quelconque M, les expressions des anciennes coordonnées au moyen des nouvelles, et des quantités relatives à la position des nouveaux axes à l'égard des anciens. Pour y parvenir, projetons le point M en m sur le plan BAC, on aura $AP = x$, $PM = y$, $Mm = z$. En menant ensuite Mm' parallèle à AD', et par m' une autre parallèle à AC', on déterminera les nouvelles coordonnées x', y' et z' du point M. Cela posé, concevons, par les extrémités de ces coordonnées, des plans verticaux parallèles à celui des yz, que nous nommerons respectivement L, L' et L''; il est visible que la distance $AP = x$ se compose de trois parties de la distance d, entre L et L', de la distance d' comprise entre L' et L'', et enfin de la distance d'', comprise entre L'' et le plan des yz. Or la distance $d = z' \times$ le cosinus de l'angle formé par la direction de cette coordonnée avec la direction de cette distance horizontale. On aura donc, en faisant cosinus $D'AB = X''$, $d = z'X''$. On trouverait de même $d' = y'X'$, et $y'' = x'X$ (en faisant cosinus $C'AB = X'$, et cosinus $B'AB = X$). On a donc enfin $x = d'' + d' + d = Xx' + X'y' + X''z'$.

Nommant Y, Y', Y'', les cosinus des angles formés par les axes AB', AC' et AD' avec l'axe des y et Z, Z', Z'', ceux des angles formés

Digitized by Google

par les mêmes lignes avec l'axe des z, on trouvera, par des raisonnemens tout-à-fait analogues au premier,

$$y = Yx' + Y'y' + Y''z',$$
$$z = Zx' + Z'y' + Z''z'.$$

On remarquera que les quantités $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$, ne sont pas toutes arbitraires, attendu qu'on a les équations ... $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x'^2+y'^2+z'^2=1 \\ x''^2+y''^2+z''^2=1 \end{array}\right\}$ en supposant le rayon des tables $= 1$.

Les formules précédentes supposent qu'on conserve l'origine des coordonnées dans sa position primitive; mais si l'on voulait déplacer cette origine, il faudrait, en représentant par a, b, c les coordonnées de la nouvelle origine, employer les formules suivantes:

$$x = Xx' + X'y' + X''z' + a,$$
$$y = Yx' + Y'y' + Y''z' + b,$$
$$z = Zx' + Z'y' + Z''z' + c.$$

Reprenons les formules

$$x = Xx' + X'y' + X''z' \ldots (A),$$
$$y = Yx' + Y'y' + Y''z' \ldots (B),$$
$$z = Zx' + Z'y' + Z''z' \ldots (C),$$

et supposons que les nouveaux axes soient rectangulaires, en prenant un point quelconque dans l'espace, sa distance à l'origine sera exprimée par $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, au moyen des anciennes coordonnées, et par $\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$, au moyen des nouvelles, on aura donc $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$; x, y, z restant d'ailleurs indéterminées, substituant pour x, y et z leurs valeurs, on aura

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 &+ 2x'y'(XX' + YY' + ZZ'), \\ &+ 2x'z'(XX'' + YY'' + ZZ''), \\ &+ 2y'z'(X'X'' + Y'Y'' + Z'Z''). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Cette équation devant se vérifier, x', y' et z' restant indéterminées, on aura

$$XX' + YY' + ZZ' = 0 \ (1),$$
$$XX'' + YY'' + ZZ'' = 0 \ (2),$$
$$X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = 0 \ (3).$$

Ces équations donnent lieu à un procédé d'élimination fort simple pour avoir les valeurs de x', y' et z', au moyen des coordonnées x, y et z. En effet, si on veut obtenir la valeur de x', il suffira de multiplier les équations *(A)*, *(B)*, *(C)* par le coèfficient de x' dans ces mêmes équations, et d'ajouter les résultats; ce qui donnera, en vertu des équations (1) et (2),

$$x' = Xx + Yy + Zz \ldots (a');$$

de même

$$y' = X'x + Y'y + Z'z \ldots (b');$$

et

$$z' = X''x + Y''y + Z''z \ldots (c').$$

Si dans l'équation $y'^2 + z'^2 + x'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on substitue pour x', y' et z', les valeurs posées ci-dessus, on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} X^2 & x^2 + Y^2 & y^2 + Z^2 & z^2 + 2XY & xy + 2XZ & xz + 2YZ & \\ + X'^2 & + Y'^2 & + Z'^2 & + 2X'Y' & + 2X'Z' & + 2Y'Z' & yz \\ + X''^2 & + Y''^2 & + Z''^2 & + 2X''Y'' & + 2X''Z'' & + 2Y''Z'' & \end{array}\right\} = x^2 + y^2 + z^2$$

Cette dernière devant se vérifier sans qu'il soit besoin d'assigner à x, y et z de valeurs déterminées, il faudra que les coèfficiens des mêmes puissances de ces indéterminées soient égaux dans les deux membres, ce qui fournit entre les quantités X, X', X''; Y, Y', Y''; Z, Z', Z'', les relations suivantes:

$$X^2 + X'^2 + X''^2 = 1,$$
$$Y^2 + Y'^2 + Y''^2 = 1,$$
$$Z^2 + Z'^2 + Z''^2 = 1,$$
$$XY + X'Y' + X''Y'' = 0,$$
$$XZ + X'Z' + X''Z'' = 0,$$
$$YZ + Y'Z' + Y''Z'' = 0.$$

Ces

Digitized by Google

Ces dernières équations nous apprennent que l'on peut procéder sur les valeurs de x', y' et z', pour obtenir celles de x, y et z, comme nous l'avons fait sur ces dernières, pour avoir x', y' et z'.

Formules particulières pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires.

Nous allons conclure de nos formules générales, les formules que M. *Laplace* emploie dans sa Mécanique céleste pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires, sans changer d'origine.

Nommons x', y' et z' les nouvelles coordonnées; et faisons

$\downarrow$ = l'angle de la trace du plan des $x'y'$ sur celui des xy avec l'axe des x,

θ = l'angle du plan des $x'y'$ avec celui des xy,

φ = l'angle de la trace du plan des $x'y'$ sur celui des xy avec l'axe des x'.

Nous allons déterminer les valeurs de X, Y, Z, &c. au moyen des quantités $\downarrow$, θ et φ que nous substituerons dans les formules *(a)*, *(b)*, *(c)*, et *(a')*, *(b')*, *(c')*, ce qui nous donnera les formules que nous cherchons.

Soit AC la trace du plan de $x'y'$ sur celui de xy, et M un point quelconque de ce plan en nommant PM, z, on aura, en menant PN perpendiculaire à AC, et joignant MN, on aura, dis-je, $Z = PN$ tang. θ; mais en appelant x et y les coordonnées du point P, on a par les formules de la transformation des coordonnées dans les courbes planes, $PN = x \sin. \downarrow - y \cos. \downarrow$.

L'équation du plan des $x'y'$ sera donc $z =$ tang. θ $(x \sin. \downarrow - y \cos. \downarrow)$; cela posé, en représentant par $x = a'z$, $y = b'z$ les équations de l'axe des z', on aura, d'après la condition que cette ligne est perpendiculaire au plan des $x'y'$, $a' = -$ tang. $\theta \sin. \downarrow$, $b' =$ tang. $\theta \cos. \downarrow$; et comme on a d'ailleurs $a = \frac{X''}{Z''}$, $b = \frac{Y''}{Z''}$, il s'ensuit que $X'' = -$ tang. $\theta \sin. \downarrow Z''$, et $Y'' =$ tang. $\theta \cos. \downarrow Z''$, d'où $X''^2 + Y''^2 = Z''^2$ tang.$^2 \theta$; ajoutant

Digitized by Google

de part et d'autre Z''^2, on aura $1 = Z''^2(1 + \text{tang.}^2\theta) = \frac{Z''^2}{\cos.^2\theta}$, d'où $Z'' = \cos.\theta$; donc $X'' = -\sin.\theta \sin.\downarrow$, et $Y'' = \sin.\theta \cos.\downarrow$.

Si sur l'axe des x' on prend un point situé à l'unité de distance de l'origine, les coordonnées de ce point seront X, Y et Z, et comme cet axe se trouve dans le plan dont l'équation est $z = \text{tang.}\theta(x \sin.\downarrow - y \cos.\downarrow)$, on aura

$$Z = \text{tang.}\theta\,(X \sin.\downarrow - Y \cos.\downarrow),$$

on aura de même

$$Z' = \text{tang.}\theta\,(X' \sin.\downarrow - Y' \cos.\downarrow).$$

Supposons donc que $AM = 1$, que Ax' soit l'axe des x', on aura $PM = Z$, $MN = \sin.\varphi$, donc à cause de $PM = MN \sin.\theta$, on aura

$$Z = \sin.\theta \sin.\varphi.$$

Le même raisonnement fait sur l'axe des y', prouvera que

$$Z' = \sin.\theta \cos.\varphi;$$

égalant ces valeurs de Z et de Z' à celles trouvées précédemment, on aura

$$\cos.\theta \sin.\varphi = X \sin.\downarrow - Y \cos.\downarrow \quad (d),$$

$$\cos.\theta \cos.\varphi = X' \sin.\downarrow - Y' \cos.\downarrow \quad (e).$$

On a $AN = \cos.\varphi$, et la valeur de AN exprimée au moyen des coordonnées du point P, est (d'après la transformation des coordonnées dans les courbes planes) $X \cos.\downarrow + Y \sin.\downarrow$, on aura donc

$$\cos.\varphi = X \cos.\downarrow + Y \sin.\downarrow;$$

le même calcul fait sur l'axe des y', donne

$$-\sin.\varphi = X' \cos.\downarrow + Y' \sin.\downarrow;$$

multipliant la première de ces équations par $\cos.\downarrow$, et l'équation (d) par $\sin.\downarrow$, et ajoutant, on trouve

$$X = \cos.\theta \sin.\downarrow + \cos.\varphi \cos.\downarrow;$$

Digitized by Google

multipliant ces mêmes équations respectivement par sin. $\downarrow$ et par cos. $\downarrow$, on trouvera

$$Y = \cos.\,\varphi \sin.\,\downarrow \cos.\,\theta \sin.\,\varphi \cos.\,\downarrow;$$

les mêmes calculs effectués sur les deux autres équations, donneront

$$X' = \cos.\,\theta \cos.\,\varphi \sin.\,\downarrow - \sin.\,\varphi \cos.\,\downarrow,$$
$$Y' = -\cos.\,\theta \cos.\,\varphi \cos.\,\downarrow - \sin.\,\varphi \sin.\,\downarrow;$$

nous aurons donc, en récapitulant,

$X = \cos.\theta \sin.\varphi \sin.\downarrow + \cos.\varphi \cos.\downarrow$, $X' = \cos.\theta \cos.\varphi \sin.\downarrow - \sin.\varphi \cos.\downarrow$, $X'' = -\sin.\theta \sin.\downarrow$,
$Y = \cos.\varphi \sin.\downarrow - \cos.\theta \sin.\varphi \cos.\downarrow$, $Y' = -\cos.\theta \cos.\varphi \cos.\downarrow - \sin.\varphi \sin.\downarrow$, $Y'' = \sin.\theta \cos.\downarrow$,
$Z = \sin.\theta \sin.\varphi$; $Z' = \sin.\theta \cos.\varphi$; $Z'' = \cos.\theta$;

substituant dans les équations

$$x = Xx' + X'y' + X''z' \ (a), \qquad x' = Xx + Yy + Zz \ (a'),$$
$$y = Yx' + Y'y' + Y''z' \ (b), \qquad y' = X'x + Y'y + Z'z \ (b'),$$
$$z = Zx' + Z'y' - Z''z' \ (c); \qquad z' = X''x + Y''y + Z''z \ (c'),$$

on aura

$x = x'(\cos.\theta \sin.\varphi \sin.\downarrow + \cos.\varphi \cos.\downarrow) + y'(\cos.\theta \cos.\varphi \sin.\downarrow - \sin.\varphi \cos.\downarrow) - z' \sin.\theta \sin.\downarrow$,
$y = x'(\cos.\varphi \sin.\downarrow - \cos.\theta \sin.\varphi \cos.\downarrow) - y'(\cos.\theta \cos.\varphi \cos.\downarrow + \sin.\varphi \sin.\downarrow) + z' \sin.\theta \cos.\downarrow$,
$z = x' \sin.\theta \sin.\varphi + y' \sin.\theta \cos.\varphi + z' \cos.\theta$.

Si on change le signe de *sinus* θ, et si on prend la valeur de y en moins, les trois formules précédentes coïncideront exactement avec celles qui se trouvent dans l'ouvrage (*) de M.rs *Monge* et *Hachette*; ces changemens de signes ne tiennent qu'à la disposition des axes, on aura encore

$x' = x(\cos.\theta \sin.\varphi \sin.\downarrow + \cos.\varphi \cos.\downarrow) + y(\cos.\varphi \sin.\downarrow - \cos.\theta \sin.\varphi \cos.\downarrow) + z \sin.\theta \sin.\varphi$,
$y' = x(\cos.\theta \cos.\varphi \sin.\downarrow - \sin.\varphi \cos.\downarrow) - y(\cos.\theta \cos.\varphi \cos.\downarrow - \sin.\varphi \sin.\downarrow) + z \sin.\theta \cos.\varphi$,
$z' = -x \sin.\theta \sin.\downarrow + y \sin.\theta \cos.\downarrow + z \cos.\theta$.

Lorsqu'on voudra passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, il suffira de substituer pour x, y et z leurs valeurs données par les équations *(a)*, *(b)* et *(c)*, l'équation en x', y' et z' résultante, sera l'équation cherchée.

Lorsqu'on voudra passer d'un système de coordonnées rectangulaires

(*) *Des Surfaces du premier et du second degré, à l'usage de l'École Polytechnique.*

Digitized by Google

à un autre système de coordonnées rectangulaires, les nouveaux axes étant déterminés de position par les quantités ψ, φ et θ, on fera usage des valeurs de x, y et z, calculées précédemment : si on voulait retourner de ce système de coordonnées à l'ancien, ce seraient les valeurs de x', y' et z' qu'il faudrait employer.

Il reste à prouver que la transformation des coordonnées n'altère en rien le degré de l'équation de la surface courbe que l'on considère.

Pour le prouver, supposons qu'on ait un trinome, tel que $Ax' + By' + Cz'$ à élever à une puissance entière α, on aura, en considérant $Ax' + By'$ comme un seul terme,

$$(Ax' + By' + Cz')^{\alpha} = (Ax' + By')^{\alpha} + C\alpha\,(Ax' + By')^{\alpha-1} z' + C^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (Ax' + By')^{\alpha-2} z'^2 + \ldots + C^{\alpha} z'^{\alpha},$$

par la formule du binome, on sait qu'en élevant $(Ax' + By')$ à une puissance entière quelconque, la somme des exposans de x' et de y' est toujours égale à l'exposant de la puissance; donc, dans $(Ax' + By')^{\alpha}$, cette somme sera égale à α; dans $(Ax' + By')^{\alpha-1} z'$, la somme des exposans de x', y' et z' sera encore égale à α. La même chose se dirait de tous les termes suivans; donc si on élève un trinome $Ax' + By' + Cz'$ à une puissance entière α, la somme des exposans de x', y' et z', dans chacun des termes du développement, sera égale à α.

Cela posé, représentons par $f(x, y, z) = 0$, l'équation de la surface courbe que nous considérons, et soit $a x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ le terme dans lequel la somme $\alpha + \beta + \gamma$ des exposans de x, y, z soit la plus grande, en sorte que le degré de l'équation $f(x, y, z) = 0$, soit $\alpha + \beta + \gamma$, en représentant les valeurs de x, y et z, au moyen des nouvelles coordonnées x', y' et z', par $Ax' + By' + Cz'$; $A'x' + B'y' + C'z'$; $A''x' + B''y' + C''z'$: A, B, C, &c. étant des quantités dépendantes de la disposition des nouveaux axes, le terme $a x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ deviendra $a(Ax' + By' + Cz')^{\alpha} (A'x' + B'y' + C'z')^{\beta} (A''x' + B''y' + C''z')^{\gamma}$.

La somme des exposans de x, y, z dans le premier facteur supposé

Digitized by Google

développé, étant égale à α, cette même somme étant égale à β dans le deuxième facteur, il s'ensuit que la somme des exposans de x', y' et z' sera égale à $\alpha + \beta$ dans chaque terme du produit des deux premiers facteurs, multipliant ce produit par le troisième facteur dans lequel la somme des exposans de x', y' et z' est par-tout égale à γ; il s'ensuit que, dans le produit total, cette somme sera égale dans tous ses termes à $\alpha + \beta + \gamma$; donc, par la transformation des coordonnées, le terme $a x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ donne naissance à une suite de termes en x', y', z' qui sont tous du même degré que le précédent : de là résulte qu'on ne change pas le degré d'une équation par la transformation des coordonnées.

Propriétés des Surfaces du second degré, rapportées à leurs diamètres conjugués.

Les surfaces courbes du second ordre présentent, relativement à leurs diamètres conjugués, des propriétés remarquables et analogues à celles que l'on a déjà reconnues aux courbes du second degré. Nous allons nous proposer de les démontrer par l'analyse.

Pour y parvenir, prenons l'équation $a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2$, qui appartient, comme nous le savons déjà, à un ellipsoïde dont les trois axes sont respectivement $2a$, $2b$, $2c$; changeons de coordonnées, et disposons des quantités qui servent à déterminer les nouveaux axes de position, de manière que l'équation transformée soit de même forme que la précédente; il faudra alors substituer pour x, y, z, les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x &= Xx' + X'y' + X''z', \\ y &= Yx' + Y'y' + Y''z', \\ z &= Zx' + Z'y' + Z''z'. \end{aligned}\right\}$$ (*Voyez* le précédent article sur la transformation des coordonnées).

La substitution faite, on aura

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
a^2b^2Z^2 & x'^2 + a^2b^2Z'^2 & y'^2 + a^2b^2Z''^2 & z'^2 + 2x'y' & a^2b^2ZZ' + 2x'z' \\
+a^2c^2Y^2 & +a^2c^2Y'^2 & +a^2c^2Y''^2 & & +a^2c^2YY' \\
+b^2c^2X^2 & +b^2c^2X'^2 & +b^2c^2X''^2 & & +b^2c^2XX'
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{|c|c|}
a^2b^2ZZ'' + 2y'z' & a^2b^2Z'Z'' \\
+a^2c^2YY'' & +a^2c^2Y'Y'' \\
+b^2c^2XX'' & +b^2c^2X'X''
\end{array}\right\} = a^2b^2c^2 \ldots (A).$$

Digitized by Google

Pour faire disparaître les termes en $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$, nous ferons

$$a^2b^2ZZ' + a^2c^2YY' + b^2c^2XX' = 0 \ldots\ldots (1),$$
$$a^2b^2ZZ'' + a^2c^2YY'' + b^2c^2XX'' = 0 \ldots\ldots (2),$$
$$a^2b^2Z'Z'' + a^2c^2Y'Y'' + b^2c^2X'X'' = 0 \ldots\ldots (3).$$

En faisant successivement y' et $z' = 0$, x' et $z' = 0$, x' et $y' = 0$ dans l'équation *(A)*, abstraction faite des termes affectés de $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$, que nous avons égalés à 0, on aura les distances du centre de la surface courbe aux points dans lesquels cette même surface coupe les diamètres auxquels elle est rapportée. Si on représente ces distances par a', b' et c', la première étant comptée sur l'axe des x', la seconde sur l'axe des y', et la troisième sur celui des z', on trouve

$$a'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2Z^2 + a^2c^2Y^2 + b^2c^2X^2} \ldots\ldots\ldots (4),$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2Z'^2 + a^2c^2Y'^2 + b^2c^2X'^2} \ldots\ldots (5),$$

$$c'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2Z''^2 + a^2c^2Y''^2 + b^2c^2X''^2} \ldots\ldots (6),$$

et l'équation de la surface deviendra, en remplaçant les coëfficiens de x'^2 et z'^2 par leurs valeurs déduites des équations (4), (5) et (6),

$$a'^2b'^2z'^2 + a'^2c'^2y'^2 + b'^2c'^2x'^2 = a'^2b'^2c'^2.$$

Les longueurs des diamètres conjugués sont évidemment $2a'$, $2b'$ et $2c'$. En multipliant l'une par l'autre les valeurs de a'^2 et de b'^2, il vient

$$a'^2b'^2 = \frac{a'^4b'^4c'^4}{\begin{array}{l|l|l|l} a^4b^4Z^2Z'^2 + a^4b^2c^2 & Y^2Z'^2 + a^2b^4c^2 & X^2Z'^2 + a^2b^2c^4 & X^2Y'^2 \\ + a^4c^4Y^2Y'^2 & + Z^2Y'^2 & + Z^2X'^2 & + X'^2Y^2 \\ + b^4c^4X^2X'^2 & & & \end{array}}$$

Mais en formant le carré de l'équation (1), on trouve

$$a^4b^4Z^2Z'^2 + a^4c^4Y^2Y'^2 + b^4c^4X^2X'^2 = -2(a^4b^2c^2ZZ'YY' + a^2b^4c^2ZZ'XX' + a^2b^2c^4YY'XX').$$

Cette équation réduit la valeur de $a'^2b'^2$ à

$$\frac{a^2b^2c^2}{a^2(Z'Y - Y'Z^2) + b^2(Z'X - X'Z^2) + c^2(Y'X - X'Y^2)}.$$

Cette expression se simplifie considérablement en multipliant les

Digitized by Google

équations (2) et (3), respectivement, par Y' et Y, puis retranchant les deux résultats l'un de l'autre; ensuite par X' et X, puis retranchant de nouveau les deux résultats l'un de l'autre, ce qui donnera les deux équations suivantes :

$$a^2 Z''(Y'Z - Z'Y) + b^2 X''(XY' - X'Y) = 0 \ldots\ldots (7),$$
$$b^2 Z''(X'Z - Z'X) + c^2 Y''(X'Y - XY') = 0 \ldots\ldots (8).$$

Ces deux équations réduisent l'expression de $a'^2 b'^2$, trouvée ci-dessus, à

$$\frac{a^2 b^2 Z''^2}{(a^2 b^2 Z''^2 + a^2 c^2 Y''^2) + b^2 c^2 X''^2)(XY' - X'Y^2)}.$$

Éliminant le multiplicateur de $(XY' - X'Y^2)$, au moyen de l'équation (6), on trouvera cette équation très-simple,

$$c a' b' (XY' - X'Y) = c' ab Z'' \ldots\ldots (9).$$

Si au lieu d'éliminer $Z'Y - Y'Z$ et $Z'X - X'Z$, au moyen des équations (7) et (8), de l'expression de $a'^2 b'^2$, nous eussions éliminé $Z'Y - Y'Z$ et $Y'X - X'Y$, ou $Z'X - X'Z$ et $Y'X - X'Y$, au moyen des mêmes équations, nous aurions trouvé les deux équations

$$b a' b' (Z'X - X'Z) = c' ac Y'' \ldots\ldots (10),$$
$$a a' b' (Z'Y - Y'Z) = c' bc X'' \ldots\ldots (11).$$

Ces équations, quoique très-simples, peuvent cependant se présenter sous une forme plus concise. Représentons par AB, AC et AD, les axes des x, des y et des z; par Aa', la ligne que nous avons nommée a', cette ligne fera, avec les axes des coordonnées, des angles dont les cosinus ont été représentés dans le calcul précédent par X, Y, Z; abaissons de l'extrémité a', la perpendiculaire $a'a''$. Menons les parallèles $a''P$, $a''Q$, et joignons $a'P$, $a'Q$, Aa'', en faisant l'angle $a'Aa'' = \theta$, $a''AB = \Phi$, on aura $Aa'' = a' \cos.\ \theta$, $AP = a' \cos.\ a'AP = a'X$; on a aussi $AP = Aa'' \cos.\ \Phi = a' \cos.\ \theta \cos.\ \Phi$; donc $X = \cos.\ \theta \cos.\ \Phi$. On trouverait, par un calcul semblable, $Y = \cos.\ \theta \sin.\ \Phi$. En supposant ensuite que AB'' soit la projection de la ligne que nous avons nommée b', on trouverait, en faisant l'angle $BAb'' = \Phi'$, et en nommant

Digitized by Google

θ' l'angle formé par la ligne b' elle-même et sa projection, on trouverait, dis-je, $X' = \cos.\theta' \cos.\varphi'$, et $Y' = \cos.\theta' \sin.\varphi'$. Donc

$$X'Y - XY' = \cos.\theta \cos.\theta' (\sin.\varphi \cos.\varphi' - \sin.\varphi' \cos.\varphi) = \cos.\theta \cos.\theta' \sin.(\varphi - \varphi').$$

Or la surface du parallélogramme construit sur les projections horizontales des demi-diamètres a' et b', est évidemment $a'b' \cos.\theta \cos.\theta' \sin.(\Phi - \Phi')$; on aura donc aussi pour l'expression de cette surface, $a'b'(X'Y - XY')$. En nommant s' cette surface, l'équation (9) se réduit à $cs' = c'abZ''$....(12).

En représentant par s'' et s''' les surfaces des parallélogrammes formés par les projections des mêmes lignes sur les deux autres plans coordonnés, on aura, au lieu des équations (10) et (11), les suivantes :

$$bs'' = c'acY''....(13), \quad \text{et } as''' = c'bcX''....(14).$$

Ces équations ont une signification bien remarquable, et mettent en évidence une propriété assez frappante des diamètres conjugués. Considérons l'équation (13) en particulier, il est visible que cs' représente le volume d'un parallélipipède construit sur l'axe c, et les projections horizontales des diamètres a' et b'; d'un autre côté, $c'abZ''$ exprime le volume d'un autre parallélipipède construit sur a, b et c'. Ces deux parallélipipèdes sont donc équivalens. Les deux autres équations donneraient lieu à des conclusions analogues; mais ce que nous venons de dire des projections des deux diamètres, peut aussi se dire des diamètres eux-mêmes. En effet, nommons S la surface du parallélogramme construit sur les demi-diamètres a' et b', en représentant par τ, τ' et τ'' les angles formés par le plan de ces lignes avec ceux des coordonnées, on aura $s' = S\cos.\tau$, $s'' = S\cos.\tau'$, $s''' = S\cos.\tau''$, ce qui changera les équations (12), (13) et (14) en celles-ci :

$$cS\cos.\tau = c'abZ''...(15), \quad bS\cos.\tau' = c'acY''...(16), \quad aS\cos.\tau'' = c'bcX''...(17).$$

Il est visible que $c\cos.\tau$ exprime la valeur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'axe c sur le plan des deux diamètres a' et b'; donc $cS\cos.\tau$ est le volume d'un parallélipipède construit sur les trois lignes c, a', b' : ce parallélipipède est donc équivalent à celui que l'on construirait sur

Digitized by Google

sur les trois lignes c', a, b. Les équations (16) et (17) démontrent que le parallélipipède construit sur b, a', b' = en volume celui construit sur c', a, b; ..... sur a, a', b' = ... sur c', b, c. En formant les produits $a'^2 c'^2$, $b'^2 c'^2$, et les soumettant à des opérations semblables à celles que nous avons effectuées sur $a'^2 b'^2$, on aura (en représentant par S' et S'' les parallélogrammes construits sur $a'c'$ et $b'c'$, puis par ω, ω', ω''; ξ, ξ', ξ'', les angles formés par les plans des lignes a', c'; b', c' avec les trois plans coordonnés):

$$\begin{array}{l|l} cS'\cos.\omega = b'abZ' & cS''\cos.\xi = a'abZ \\ bS'\cos.\omega' = b'acY' & bS''\cos.\xi' = a'acY \\ aS'\cos.\omega'' = b'bcX' & aS''\cos.\xi'' = a'bcX. \end{array}$$

Ces six équations, jointes aux trois que nous avons trouvées précédemment, nous démontrent que si on prend arbitrairement deux diamètres conjugués, et à volonté un des axes principaux, le parallélipipède construit sur ces trois lignes sera équivalent à celui que l'on construirait sur les deux axes principaux restans et le diamètre conjugué qui n'a pas été employé à la construction du premier parallélipipède. Si on divise membre à membre les équations $cS\cos.\tau = c'abZ''$, et $cS\cos.\tau' = c'acY''$, on aura $Y'' = \frac{b^2}{c^2}, \frac{\cos.\tau'}{\cos.\tau}.Z''$; divisant encore la première par $aS\cos.\tau'' = c'bcX''$, on aura $X'' = \frac{a^2}{c^2}, \frac{\cos.\tau''}{\cos.\tau}Z''$. Donc, à cause de $X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = 1$, on aura

$$Z'' = \frac{c^2\cos.\tau}{\sqrt{(a^4\cos.^2\tau'' + b^4\cos.^2\tau' + c^4\cos.^2\tau)}},$$

$$Y'' = \frac{b^2\cos.\tau}{\sqrt{(a^4\cos.^2\tau'' + b^4\cos.^2\tau' + c^4\cos.^2\tau)}},$$

$$X'' = \frac{a^2\cos.\tau''}{\sqrt{(a^4\cos.^2\tau'' + b^4\cos.^2\tau' + c^4\cos.^2\tau)}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (6), on aura

$$c'^2 = \frac{a^4\cos.^2\tau'' + b^4\cos.^2\tau' + c^4\cos.^2\tau}{a^2\cos.^2\tau'' + b^2\cos.^2\tau' + c^2\cos.^2\tau}.$$

Digitized by Google

Cela posé, de l'équation $cS\cos.\tau = c'abZ''$, on tire, en multipliant les deux membres par c',

$c'S = ab\,\frac{c'^2 Z}{c\cos.\tau} = \frac{\sqrt{(a^4\cos.^2\tau'' + b^4\cos.^2\tau' + c^4\cos.^2\tau)}}{a^2\cos.^2\tau'' + b^2\cos.^2\tau' + c^2\cos.^2\tau}.ab.c$, en substituant pour Z'' et c'^2 leurs valeurs, mais en représentant par $x = \alpha z$, $y = \beta z$, les équations de la ligne c', et par $z = Ax + By$, l'équation du plan des lignes a' et b', on aura pour le sinus de l'angle $\downarrow$ que fait la ligne c' avec ce plan,

$$\sin.\downarrow = \frac{A\alpha + B\beta + 1}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)}\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)}} = X''\cos.\tau'' + Y''\cos.\tau' + Z''\cos.\tau.$$

Substituant pour X'', Y'', Z'', leurs valeurs, on trouvera

$$\sin.\downarrow = \frac{a^2\cos.^2\tau'' + b^2\cos.^2\tau' + c^2\cos.^2\tau}{\sqrt{(a^4\cos.^2\tau'' + b^4\cos.^2\tau' + c^4\cos.^2\tau)}}.$$

Donc $c'S = \frac{abc}{\sin.\downarrow}$, d'où $c'S\sin.\downarrow = abc$. Cette dernière équation démontre que le parallélipipède construit sur les trois axes, est équivalent à celui que l'on construirait sur les trois diamètres conjugués.

La perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diamètre c' sur le plan des deux autres a' et b', est exprimée par $c'\sin.\theta$. Or si on multiplie la valeur de c'^2 obtenue ci-dessus par $\sin.^2\theta$, on aura $c'^2\sin.^2\theta = a^2\cos.^2\tau'' + b^2\cos.^2\tau' + c^2\cos.^2\tau$; équation qu'on peut énoncer de cette manière. Le carré de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diamètre c' sur le plan des deux autres, est égal à la somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités des trois axes sur le même plan.

Il existe entre les diamètres conjugués de l'ellipsoïde et les axes principaux une relation bien simple; c'est que la somme des carrés des diamètres conjugués = la somme des carrés des trois axes.

Pour le prouver, ajoutons les équations (4) et (5), il viendra

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2b^2c^2[a^2b^2(Z^2 + Z'^2) + a^2c^2(Y^2 + Y'^2) + b^2c^2(X^2 + X'^2)]}{(a^2b^2Z^2 + a^2c^2Y^2 + b^2c^2X^2)(a^2b^2Z'^2 + a^2c^2Y'^2 + b^2c^2X'^2)}.$$

Nous avons trouvé précédemment que le dénominateur de $a'^2b'^2$ (qui est le même que celui de $a'^2 + b'^2$) était égal à $a^2b^2c^2[a^2(Z'Y - Y'Z)^2$

Digitized by Google

$+ b^2(Z'X - ZX')^2 + c^2(Y'X - X'Y)^2]$, qui, en vertu des équations (6), (7) et (8), se réduit à $\frac{a^2b^2c^6(Y'X - X'Y)^2}{c'^2Z''^2}$. On aura donc

$$a'^2 + b'^2 = \frac{c'^2Z''^2[a^2b^2(Z^2 + Z'^2) + a^2c^2(Y^2 + Y'^2) + b^2c^2X^2 + X'^2]}{c^4(XY' - X'Y)^2}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer le numérateur. Pour cela, nous multiplierons l'équation (1) successivement par ZZ', YY', XX', et nous aurons

$$a^2b^2Z^2Z'^2 + a^2c^2ZZ'YY' + b^2c^2XX'ZZ' = 0,$$
$$a^2c^2Y^2Y'^2 + a^2b^2ZZ'YY' + b^2c^2XX'YY' = 0,$$
$$b^2c^2X^2X'^2 + a^2c^2YY'XX' + a^2b^2ZZ'XX' = 0.$$

Substituant dans la première, successivement pour Z^2 et Z'^2, leurs valeurs $1 - X'^2 - Y''^2$, et $1 - X^2 - Y^2$;

Dans la seconde, pour Y^2 et Y'^2; $1 - X^2 - Z^2$, et $1 - X'^2 - Y''^2$,

Dans la troisième, pour X^2 et X'^2; $1 - Y^2 - Z^2$, et $1 - Y'^2 - Z'^2$,

on aura les six équations suivantes:

$$a^2b^2Z^2 - a^2b^2X'^2Z^2 - a^2b^2Y'^2Z^2 + a^2c^2ZZ'YY' + b^2c^2XX'ZZ' = 0,$$
$$a^2b^2Z'^2 - a^2b^2X^2Z'^2 - a^2b^2Y^2Z'^2 + a^2c^2ZZ'YY' + b^2c^2XX'ZZ' = 0,$$
$$a^2c^2Y^2 - a^2c^2Z'^2Y^2 - a^2c^2X'^2Y^2 + a^2b^2ZZ'YY' + b^2c^2XX'YY' = 0,$$
$$a^2c^2Y'^2 - a^2c^2Z^2Y'^2 - a^2c^2X^2Y'^2 + a^2b^2ZZ'YY' + b^2c^2XX'YY' = 0,$$
$$b^2c^2X^2 - b^2c^2X^2Z'^2 - b^2c^2X^2Y'^2 + a^2c^2XX'YY' + a^2b^2XX'ZZ' = 0,$$
$$b^2c^2X'^2 - b^2c^2X'^2Z^2 - b^2c^2X'^2Y^2 + a^2c^2XX'YY' + a^2b^2XX'ZZ' = 0.$$

Ajoutant ces six équations, on aura

$$a^2b^2(Z^2 + Z'^2) + a^2c^2(Y^2 + Y'^2) + b^2c^2(X^2 + X'^2) =$$
$$b^2(a^2 + c^2)X'Z - XZ'^2 + a^2(b^2 + c^2)Y'Z - YZ'^2 + c^2(a^2 + b^2)(XY' - X'Y)^2.$$

Les équations (7) et (8) réduisent le second membre de cette équation à

$$\frac{c^2}{a^2b^2Z''^2}[a^2c^2(a^2 + c^2)Y''^2 + b^2c^2(b^2 + c^2)X''^2 + a^2b^2(a^2 + b^2)Z''^2(XY' - X'Y)^2].$$

On aura donc

$$a'^2 + b'^2 = \frac{c'^2[a^2c^2(a^2 + c^2)Y''^2 + b^2c^2(b^2 + c^2)X''^2 + a^2b^2(a^2 + b^2)Z''^2]}{a^2b^2c^2}.$$

Digitized by Google

Mais on peut mettre évidemment le multiplicateur de c'^2, dans le numérateur de l'expression précédente, sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} a^2c^2Y''^2(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2c^2Y''^2 \\ +b^2c^2X''^2(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2c^2X''^2 \\ +a^2b^2Z''^2(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2c^2Z''^2 \end{array}\right\} =(a^2+b^2+c^2)(b^2c^2Y''^2+a^2b^2X''^2+b^2c^2Z''^2)-a^2b^2c^2.$$

Substituant dans l'équation précédente, et remarquant qu'en vertu de l'équation (6) on a $c'^2a^2c^2Y''^2 + b^2c^2X''^2 + a^2b^2Z''^2 = a^2b^2c^2$, on aura $a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$; équation qui renferme le théorème que nous nous proposions de démontrer.

Nous ne nous arrêterons pas à déterminer les propriétés de l'hyperboloïde à une seule et à deux nappes; elles seraient faciles à déduire d'après les calculs précédens.

Du contact des surfaces coniques avec les surfaces du second ordre.

M. *Monge*, dans ses leçons à l'École polytechnique, a démontré que lorsqu'une surface conique enveloppe une surface du deuxième degré, la courbe de contact est toujours plane; que ce plan (dont la position est dépendante de celle du cône) passe toujours par une même ligne droite lorsque le sommet du cône circonscrit se meut en ligne droite. En supposant ensuite que le sommet de ce cône soit dirigé dans son mouvement par une surface plane déterminée, M. *Monge* a encore démontré que le plan de la courbe de contact passe toujours par un même point.

Nous allons exposer cette théorie, et joindre aux propositions énoncées ci-dessus, plusieurs autres propriétés assez remarquables.

En représentant par a, b, c les coordonnées du sommet d'une surface conique quelconque, on aura pour l'équation aux différences partielles de cette même surface,

$$z-c=(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}\ldots(A).$$

Représentons par $A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = 1 \ldots\ldots$(B) l'équation

Digitized by Google

de la surface enveloppée, il faudra nécessairement, pour que l'équation *(A)* puisse convenir à la courbe du contact de la surface conique et de la surface du deuxième degré représentée par l'équation *(B)*, que les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$ soient les mêmes que celles que donnerait l'équation *(B)* pour ces mêmes coëfficiens différentiels; on aura donc pour l'une des équations de la courbe de contact,

$$z - c = -(x - a)\frac{A^2 x}{C^2 z} - (y - b)\frac{B^2 y}{C^2 z},$$

laquelle se réduit à

$$A^2 ax + B^2 by + C^2 cz = 1 \ldots\ldots (1).$$

Comme elle est linéaire relativement aux coordonnées x, y, z, il s'ensuit que la courbe de contact d'une surface conique et d'une surface du deuxième degré est plane.

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$z = -\frac{A^2 a}{C^2 c} x - \frac{B^2 b}{C^2 c} y + \frac{1}{C^2 c} \ldots\ldots (C).$$

Nous voyons que les coëfficiens de x et de y seront les mêmes tant que les rapports $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ seront constans, ce qui aurait lieu si les quantités a, b, c, étant variables, étaient liées par les équations $a = mc$, $b = nc$, lesquelles appartiennent à une ligne droite passant par l'origine des coordonnées; de là résulte que si le sommet du cône circonscrit se meut sur une ligne droite passant par l'origine des coordonnées, la courbe de contact se mouvra aussi parallèlement à elle-même. Considérons maintenant dans l'équation *(C)* le terme constant $\frac{1}{C^2 c}$, il représente évidemment l'ordonnée verticale du point de rencontre du plan qui renferme la courbe de contact que nous nommerons *plan de contact*, avec l'axe des z. Ce point sera toujours le même lorsque les quantités a, b restant indéterminées, la quantité c sera constante : ce qui prouve que, si une surface conique circonscrite à une surface du deuxième degré, se meut de manière que son sommet parcoure un plan

Digitized by Google

horizontal éloigné de celui des xy d'une quantité quelconque c, le plan de contact coupera toujours l'axe des z au même point, la distance de ce point à l'origine des coordonnées sera égale à $\frac{1}{C^2 c}$, quantité qui est absolument indépendante de A et de B, en sorte qu'elle sera la même pour toutes les surfaces du deuxième degré dont les équations ne différeraient que par ces deux paramètres.

Reprenons encore l'équation (1); nous voyons que lorsque les quantités a, b et c ont des valeurs fixes et déterminées, la courbe de contact a aussi une position fixe et déterminée : mais lorsque ces quantités sont variables, ou, ce qui revient au même, lorsque le sommet du cône change de position dans l'espace, la courbe de contact prend aussi diverses positions. Or le sommet du cône peut se mouvoir dans l'espace, de trois manières différentes :

1.° En parcourant une courbe à double courbure;

2.° En parcourant une surface courbe.

3.° Le sommet du cône peut enfin se mouvoir d'une manière discontinue.

Voyons ce qui est relatif à chacun de ces mouvemens particuliers.

Soient $\left\{\begin{array}{l} F(a, b, c) = 0, \\ f(a, b, c) = 0, \end{array}\right.$ les équations de la courbe à double courbure sur laquelle se meut le sommet du cône que nous nommerons *courbe directrice*.

Lorsque le sommet du cône correspond à deux points consécutifs de la directrice, il en résulte deux courbes de contact différentes; leurs plans se coupent en une ligne droite dont la position dans l'espace est dépendante de celle du sommet du cône : il correspond donc à chaque position du cône une pareille ligne droite. Le lieu de toutes ces lignes formera une surface développable, dont la nature dépendra de celle de la courbe directrice.

Pour avoir l'équation de cette ligne droite dans une position quelconque du cône, il faudra différencier l'équation (1), par rapport à a, b, c, et regarder x, y, z comme constantes, puisque les points d'intersection de deux plans de contact consécutifs sont les seuls qui ne

Digitized by Google

varient point, quoique a, b, c varient. Le résultat de cette différentiation sera

$$A^2 x\,da + B^2 y\,db + C^2 z\,dc = 0.$$

Cette équation pourra toujours être délivrée des différentielles qu'elle renferme en soumettant à la différentiation les équations de la directrice ; ce qui donnera les valeurs de deux quelconques des quantités da, db, dc. Au moyen de la troisième, on parviendra donc à une équation finie entre x, y, z, a, b et c.

Si on élimine a, b, c entre les quatre équations $\left\{\begin{array}{l} F(a,b,c) = 0, \\ f(a,b,c) = 0, \\ A^2 ax + B^2 by + C^2 cz = 1, \\ A^2 x\,da + B^2 y\,db + C^2 z\,dc = 0, \end{array}\right\}$ on aura l'équation de la surface développable, qui serait le lieu des intersections continuelles des plans de contact.

Application au cas où la ligne directrice serait droite.

Dans ce cas particulier, les équations $\left\{\begin{array}{l} F(a,b,c) = 0, \\ f(a,b,c) = 0, \end{array}\right\}$ sont de la forme $\left\{\begin{array}{l} a = mc + m', \\ b = nc + n', \end{array}\right\}$ d'où $da = m\,dc$, $db = n\,dc$; les quatre équations posées ci-dessus, deviendront

$$a = mc + m' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$b = nc + n' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$A^2 ax + B^2 by + C^2 cz = 1 \ldots (3),$$
$$A^2 mx + B\,ny + C^2 z = 0 \ldots (4).$$

Les équations (1) et (2) réduisent l'équation (3) à

$$(A^2 mx + B^2 ny + C^2 z)\,c + A^2 m'x + B^2 n'y = 1,$$

laquelle devient, à cause de l'équation (4),

$$A^2 m'x + B^2 n'y = 1 \ldots\ldots (5).$$

Digitized by Google

Éliminant successivement y et x entre cette dernière et l'équation (4), on aura

$$A^2(m'n - mn')x - C^2n'z = n,$$
$$B^2(mn' - nm')y - C^2m'z = m.$$

Ces équations et l'équation (5) appartenant à une ligne droite, il s'ensuit que tous les plans de contact passent par une même droite.

Le plan qui joindra cette droite au centre de la surface enveloppée, étant représenté par $z = Mx + Ny$, les constantes M et N seront déterminées par les équations

$$MB^2n - NA^2m = 0,$$
$$A^2B^2(m'n - mn') - MB^2C^2n' + NA^2C^2m' = 0.$$

Elles se simplifient considérablement dans le cas de la sphère, où on a $A = B = C$; elles se réduisent à

$$Mn - Nm = 0,$$
$$m'n - mn' - Mn' + Nm' = 0.$$

On en déduit $M = -m$, et $N = -n$; ce qui prouve que, dans la sphère, le plan qui joint l'intersection commune de tous les plans de contact au centre, est perpendiculaire à la ligne droite directrice.

Application au cas où la ligne directrice est une courbe plane de nature quelconque.

Dans ce cas particulier, les équations de la ligne directrice peuvent se présenter sous la forme suivante :

$$C = Ha + Ib + L,$$
$$B = \Phi a.$$

Les équations (1), (2), (3) et (4), rapportées plus haut, deviendront

$$C = Ha + Ib + L,$$
$$B = \Phi a,$$
$$A^2ax + B^2by + C^2cz = 1,$$
$$A^2xda + B^2ydb + C^2zdc = 0.$$

Faisant

Digitized by Google

Faisant $db = \varphi' \times da$, et éliminant c et b, il viendra les équations suivantes :

$$A^2 ax + B^2 y.\varphi + C^2 z(Ha + I\varphi + L) = 1,$$
$$A^2 x + B^2 y.\varphi' + C^2 z(H + I\varphi') = 0.$$

La nature de la fonction φ restant inconnue, il est absolument impossible d'effectuer l'élimination de a entre ces deux équations ; mais on peut du moins parvenir à l'équation aux différences partielles de la surface que nous considérons. Pour cela, il suffit de différencier la première par rapport à x, y, z et a; ce qui me donnera

$$da[A^2 x + B^2 y\varphi' + C^2 z(H + I\varphi')] + A^2 a dx + B^2 \varphi dy,$$
$$+ C^2 (Ha + I\varphi + L)\left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right) = 0.$$

Faisant, pour abréger, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, et remarquant que le multiplicateur de da est égal à 0, en vertu des équations précédentes, on aura

$$dx[A^2 a + C^2 p(Ha + I\varphi + L)] + dy[B^2 \varphi + C^2 q(Ha + I\varphi + L)] = 0;$$

et à cause de l'indépendance qui existe entre dx et dy, nous aurons

$$(A^2 + C^2 pH)a + C^2 pI.\varphi + C^2 Lp = 0,$$
$$C^2 qH.a + (B^2 + C^2 Iq)\varphi + C^2 Lq = 0.$$

On en tire

$$a = -\frac{B^2 C^2 Lp}{A^2(B^2 + C^2 Iq) + B^2 C^2 pH},$$
$$\varphi = -\frac{A^2 C^2 qL}{A^2(B^2 + C^2 Iq) + B^2 C^2 pH}.$$

Cela posé, l'équation $A^2 ax + B^2 y\varphi + C^2 z(Ha + I\varphi + L) = 1$, pouvant se mettre sous la forme

$$(A^2 x + C^2 Hz)a + (B^2 y + C^2 Iz)\varphi + C^2 Lz = 1.$$

Si on y substitue pour a et φ les valeurs que nous venons de trouver, elle se réduira, en y faisant toutes les réductions convenables, à

$$\frac{A^2 B^2 (z - px - qy)}{A^2(B^2 + C^2 Iq) + B^2 C^2 pH} = \frac{1}{C^2 L}.$$

Digitized by Google

En chassant les dénominateurs, on trouvera facilement l'équation suivante :

$$z - \frac{1}{C^2 L} = \left(x + \frac{H}{A^2 L}\right) p + \left(y + \frac{I}{B^2 L}\right) q.$$

Sous cette forme, on voit évidemment que la surface développable engendrée par le mouvement du plan de contact, est une surface conique, dont les coordonnées du sommet sont $\frac{1}{C^2 L}$, $-\frac{H}{C^2 L}$, $-\frac{I}{B^2 L}$. Comme le résultat auquel nous venons de parvenir est absolument indépendant de la forme et de la position de la courbe directrice dans son plan, on pourrait en conclure que lorsque le sommet d'une surface conique circonscrite à une surface du deuxième degré se meut sur une surface plane, le plan de contact passe dans toutes ses positions par le même point.

Lorsque nous nous occuperons du mouvement sur une surface, nous démontrerons cette proposition d'une manière plus simple. Si les quantités H et I étaient nulles, c'est-à-dire, si le plan de la courbe directrice est horizontal, l'équation

$$z - \frac{1}{C^2 L} = \left(x + \frac{H}{A^2 L}\right) p + \left(y + \frac{I}{B^2 L}\right) q$$

se réduirait à $z - px - qy = \frac{1}{C^2 L}$, qui appartient à une surface conique dont le sommet serait situé sur l'axe des z. Si les quantités H, I et L étaient nulles en même temps, on aurait $z - px - qy = \infty$. Cette équation appartient à une surface cylindrique dont la génératrice serait verticale. En effet, $z - px - qy$ n'est autre chose que l'ordonnée verticale du point de rencontre du plan tangent avec l'axe des z, puisque cette ordonnée est infinie ; c'est une preuve que le plan tangent est, dans toutes ses positions, parallèle à l'axe des z : donc aussi la surface dont l'équation est $z - px - qy = \infty$, est une surface cylindrique verticale. Enfin la quantité L peut être nulle par elle-même, sans que H et I le soient ; dans ce cas, on devra avoir

$$1 = -\frac{C^2 H}{A^2} p - \frac{C^2 I}{B^2} q.$$

Digitized by Google

Cette équation appartient à une surface cylindrique dont la génératrice serait parallèle à une droite représentée par les équations

$$x = -\frac{C^2 H}{A^2} z + \alpha,$$

$$y = -\frac{C^2 I}{B^2} z + \beta.$$

Dans le cas où la surface du deuxième degré que l'on considère serait une sphère, cette droite serait perpendiculaire au plan de la courbe directrice, supposée donnée par l'équation $c = Ha + Ib + L$.

Passons au cas où le sommet de la surface conique se meut sur une surface courbe représentée par l'équation $F(a, b, c) = 0$; en supposant que le sommet du cône prenne deux positions infiniment voisines sur la surface, le plan de contact prendra aussi deux positions consécutives, la ligne d'intersection de ces plans aura pour équations

$$A^2 ax + B^2 by + C^2 cz = 1,$$

$$A^2 x\,da + B^2 y\,db + C^2 z\,dc = 0.$$

En supposant $dc = p\,da + q\,db$, on aura pour la deuxième des équations précédentes $A^2 x + C^2 pz + (B^2 y + C^2 qz)\frac{db}{da} = 0$. La position de cette droite dépend de la valeur numérique du rapport $\frac{db}{da}$. Si on différencie cette dernière équation en ne faisant varier que $\frac{db}{da}$, on aura une équation relative au point de rencontre de cette droite et de celle qui correspond à la variation de $\frac{db}{da}$; cette opération nous conduira aux deux équations suivantes:

$$A^2 x + C^2 z\frac{dc}{da} = 0 \ldots B^2 y + C^2 z\frac{dc}{db} = 0.$$

Le lieu de tous les points déterminés de cette manière, forme une surface particulière dont la nature est intimement liée à celle de la

Digitized by Google

surface courbe directrice, on obtiendra l'équation de cette surface en éliminant a, b, c entre les équations suivantes :

$$F(a, b, c) = 0,$$
$$A^2ax + B^2by + C^2cz = 1,$$
$$A^2x + C^2z\,\frac{dc}{da} = 0,$$
$$B^2y + C^2z\,\frac{dc}{db} = 0.$$

Application au cas où la Surface directrice est plane.

L'ÉQUATION étant alors de la forme $c = Ha + Ib + L$, on a $\frac{dc}{da} = H$, $\frac{dc}{db} = I$, ce qui réduira les quatre équations précédentes à

$$C = Ha + Ib + L,$$
$$A^2ax + B^2by + C^2cz = 1,$$
$$A^2x + C^2Hz = 0 \ldots (A),$$
$$B^2y + C^2Iz = 0 \ldots (B),$$

éliminant c entre les deux premières, nous aurons

$$(A^2x + C^2Hz)a + (B^2y + C^2Iz)b + C^2Lz = 1.$$

Elle se réduit, à cause des deux dernières, à $C^2Lz = 1$, d'où $z = \frac{1}{C^2L}$. Les équations (A) et (B) me donnent, par la substitution de la valeur de z, $y = -\frac{I}{B^2L}$, $x = -\frac{H}{A^2L}$. Ces résultats nous apprennent que si le sommet d'une surface conique se meut sur une surface plane, tous les plans de contact passent par le même point.

La ligne qui joint le centre de la surface enveloppée à ce point, a pour équations $x = -\frac{C^2H}{A^2}z$, $y = -\frac{C^2I}{B^2}z$. Ces équations se réduisent à $x = -Hz$, $y = -Iz$, dans le cas où la surface

Digitized by Google

enveloppée est une sphère ; ce qui prouve que lorsqu'une surface conique circonscrite à une sphère se meut de manière que son sommet parcoure une surface plane, la ligne qui joint le centre de cette sphère au point commun à tous les plans de contact, est perpendiculaire à la surface directrice.

C'est ici le lieu de placer quelques circonstances particulières du mouvement discontinu.

Il est à remarquer que les équations $z = \frac{1}{C^2 L}$, $y = -\frac{I}{B^2 L}$ et $x = -\frac{H}{A^2 L}$ appartiennent à un point unique, dans le cas où les quantités H, I, L sont constantes; mais il n'en sera pas de même dans le cas où ces quantités seront variables. Supposons, par exemple, que les quantités H et I soient constantes, et que L soit seule variable, l'équation $c = Ha + Ib + L$ appartient alors à une infinité de plans parallèles entre eux, et les valeurs de x, y, z, obtenues ci-dessus, conviennent à un système de points situés sur une même droite, passant par l'origine des coordonnées ou par le centre de la surface enveloppée. En effet, l'élimination de L entre les expressions de x, y, z, conduit à $y = -\frac{C^2 I}{B^2} z$, $x = -\frac{C^2 H}{A^2} z$.

Si, au contraire, la quantité L est constante, et les deux autres variables, l'équation $c = Ha + Ib + L$ appartient à un système de plans passant par le même point de l'axe des z. Dans ce cas, la valeur des z est constante, et celles de x et de y variables. Ces valeurs conviennent donc à un système de points situés sur une même surface plane horizontale.

Il nous reste encore un cas à examiner; c'est celui où la quantité L serait constante en même temps que l'une des quantités H et I. Pour donner une application de ce cas, supposons que le sommet de la surface conique soit assujetti à se mouvoir successivement sur une infinité de plans passant par une même droite donnée par les équations $x = mz + m'$,

Digitized by Google

$y = nz + n'$, on aura alors entre les quantités H, I, L, m et m', les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 1 &= Hm + In \\ 0 &= Hm' + In' + L \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} I &= \frac{m' + Lm}{m'n - mn'} \\ H &= -\frac{n' + Ln}{m'n - mn'}, \end{aligned}\right.$$

les formules $z = \frac{1}{C^2 L}$, $y = -\frac{I}{B^2 L}$, $x = -\frac{H}{A^2 L}$ deviendront

$$z = \frac{1}{C^2 L},$$

$$y = -\frac{m' + Lm}{B^2 L(m'n - mn')}$$

$$x = \frac{n' + Ln}{A^2 L(m'n - mn')}.$$

L'élimination de la constante arbitraire L me donnera les deux équations

$$A^2(m'n - mn')x - C^2 n' z = n,$$
$$B^2(mn' - m'n)y - C^2 m' z = m.$$

Ces équations sont celles de la ligne par laquelle passent tous les plans de contact, en supposant que le sommet du cône se meuve sur la ligne donnée par les équations

$$x = mz + m', \quad y = nz + n'.$$

Du cas où le sommet de la Surface conique se meut sur une Surface courbe du deuxième degré.

Supposons que la surface directrice soit représentée par l'équation

$$A'^2 a^2 + B'^2 b^2 + C'^2 c^2 = 1,$$

nous en déduirons $\frac{dc}{da} = -\frac{A'^2 a}{C'^2 c}$, $\frac{dc}{db} = -\frac{B'^2 b}{C'^2 c}$; nous aurons

Digitized by Google

alors à éliminer a, b, c entre les quatre équations suivantes :

$$A'^2a^2 + B'^2b^2 + C'^2c^2 = 1 \ldots (1),$$
$$A^2ax + B^2by + C^2cz = 1 \ldots (2),$$
$$A^2C'^2cx - A'^2C^2az = 0 \ldots\ldots (3),$$
$$B^2C'^2cy - B'^2C^2bz = 0 \ldots\ldots (4).$$

Des équations (3) et (4) on tire $a = \frac{A^2C'^2x}{A'^2C^2z}c$, $b = \frac{B^2C'^2y}{B'^2C^2z}c$.

Substituant dans (2), on aura, pour la valeur de c,

$$\frac{A'^2B'^2C^2z}{A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2}.$$

Il en résulte

$$a = \frac{A^2B'^2C'^2x}{A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2},$$
$$b = \frac{A'^2B^2C'^2y}{A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2}.$$

Substituant ces valeurs de a, b, c dans l'équation (1), on aura

$$\frac{A^4A'^2B'^4C'^4x^2 + A'^4B'^2B^4C'^4y^2 + A'^4B'^4C^4C'^2z^2}{(A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2)^2} = 1 :$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{A'^2B'^2C'^2(A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2)}{(A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2)^2} = 1,$$

laquelle se réduit à

$$A^4B'^2C'^2x^2 + A'^2B^4C'^2y^2 + A'^2B'^2C^4z^2 = A'^2B'^2C'^2 \ldots\ldots (5).$$

Cette équation appartient à une surface du deuxième degré, dont le centre est à l'origine même des coordonnées.

Si la surface enveloppée est un ellipsoïde, ainsi que la surface directrice, la surface déterminée par l'équation (5) sera aussi un ellipsoïde; ses axes ont avec ceux des deux autres ellipsoïdes des rapports bien simples. Représentons par

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

l'équation de la surface enveloppée, et par

$$b'^2c'^2x^2 + a'^2c'^2y^2 + a'^2b'^2z^2 = a'^2b'^2c'^2$$

Digitized by Google

l'équation de la surface directrice, on aura

$$A^2 = \frac{1}{a^2},\quad B^2 = \frac{1}{b^2},\quad C^2 = \frac{1}{c^2},$$

$$A'^2 = \frac{1}{a'^2},\quad B'^2 = \frac{1}{b'^2},\quad C'^2 = \frac{1}{c'^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (5), on aura

$$\frac{x^2}{a^4 b'^2 c'^2} + \frac{y^2}{b^4 a'^2 c'^2} + \frac{z^2}{c^4 a'^2 b'^2} = \frac{1}{a'^2 b'^2 c'^2}.$$

Multipliant les deux membres par $a'^2 b'^2 c'^2$, on aura

$$\frac{a'^2}{a^4} x^2 + \frac{b'^2}{b^4} y^2 + \frac{c'^2}{c^4} z^2 = 1.$$

En nommant a'', b'', c'' les demi-axes de cet ellipsoïde, on aura

$$a'' = \frac{a^2}{a'},\quad b'' = \frac{b^2}{b'},\quad c'' = \frac{c^2}{c'}.$$

Des calculs précédens résulte que si le sommet d'une surface conique, circonscrite à une surface du deuxième degré, peut se mouvoir de manière à parcourir une surface du second ordre, concentrique à la première, le plan de contact, dans son mouvement, sera toujours tangent à une surface du deuxième degré, concentrique aux deux premières. Si les deux premières surfaces, c'est-à-dire, la surface enveloppée et la surface directrice, sont des ellipsoïdes, la troisième surface sera aussi un ellipsoïde, dont chacun des axes principaux sera une troisième proportionnelle aux axes de la surface enveloppée et de la surface directrice qui se trouvent dans la même direction.

Des propriétés précédentes, on pourrait conclure, comme cas particuliers, les deux suivantes:

Si le sommet d'un angle circonscrit à une courbe du deuxième degré se meut en ligne droite, la ligne qui joindra les points de contact des deux côtés de l'angle avec la courbe du deuxième degré, passe toujours par le même point; et si le sommet de l'angle circonscrit se meut sur une ellipse concentrique à la première courbe du deuxième degré, que nous supposerons aussi être ellipse, la corde qui passe par les points de contact sera, dans toutes positions, tangente à une troisième ellipse, dont chacun des axes est une troisième proportionnelle à ceux de l'ellipse enveloppée et de l'ellipse directrice qui se trouvent dans la même direction.

MÉMOIRE

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur les Surfaces courbes du second Degré;

Par M. BRIANCHON, Élève de l'École Polytechnique *(admis en l'an 12)*.

LEMME.

AYANT une droite AA' *(Fig. A.)* d'une longueur connue, si l'on prend à volonté sur cette droite ou sur son prolongement, un point O qui la divise en deux segmens OA, OA', il est toujours possible de déterminer sur cette même droite ou sur son prolongement, un autre point P qui y forme deux nouveaux segmens PA, PA', proportionnels aux deux premiers.

Il est évident que de ces deux points O et P, l'un sera placé sur la ligne même AA', et l'autre sur le prolongement de cette ligne.

I.

(Fig. 1.re) Soient dans l'espace trois droites quelconques AA', BB', CC', qui, prolongées s'il le faut, se croisent toutes en un même point P (*).

Nommons $\left\{\begin{matrix} L \\ l \\ M \\ m \\ N \\ n \end{matrix}\right\}$ le point de rencontre de $\left\{\begin{matrix} AB \text{ et } A'B' \\ AB' \quad A'B \\ AC \quad A'C' \\ AC' \quad A'C \\ BC \quad B'C' \\ BC' \quad B'C \end{matrix}\right\}$ prolongées au besoin,

Il est évident que les trois points $\left\{\begin{matrix} L, M, N \\ L, m, n \\ l, M, n \\ l, m, N \end{matrix}\right\}$ se trouvent placés sur la droite d'intersection du plan qui passe par les trois points $\left\{\begin{matrix} A, B, C \\ A, B, C' \\ A, B', C \\ A', B, C \end{matrix}\right\}$ avec le plan qui passe par les trois points $\left\{\begin{matrix} A', B', C' \\ A', B', C \\ A', B, C' \\ A, B', C' \end{matrix}\right\}$

(*) Prenons pour exemple les trois arêtes AA', BB', CC', d'un tronc de pyramide triangulaire. *(Fig. 1.re)*

Digitized by Google

Or on voit qu'en prenant deux quelconques de ces quatre droites d'intersection, elles ont un point de commun; donc chacune d'elles va couper les trois autres, et par conséquent elles sont toutes situées sur un même plan, que je désigne par XY.

II.

Ce plan XY sur lequel sont placés les six points L, M, N, l, m, n, jouit de la propriété de diviser chacune des trois droites AA', BB', CC', prolongées s'il le faut, en deux segmens proportionnels à ceux que le point P forme sur ces mêmes droites.

Cette propriété repose sur la proposition suivante, extraite de la *Géométrie de position*, pag. 282.

« Dans tout quadrilatère complet (*) ayant ses trois diagonales, » chacune de ces diagonales est coupée par les deux autres en segmens » proportionnels. »

(Fig. 2.) Considérons, par exemple, ce qui se passe dans le plan des deux droites AA', BB'; ce plan est rencontré par celui XY suivant la droite Ll, et B, B' sont les points de concours des côtés opposés du quadrilatère $ALA'l$; en sorte que les trois diagonales de ce quadrilatère complet sont BB', Ll, AA'. Ainsi, d'après le théorème précédent, l'une quelconque de ces trois diagonales, comme AA', est coupée par les deux autres Ll et BB', en segmens proportionnels OA, OA', PA, PA', c'est-à-dire que ces quatre segmens ont entre eux la relation

$$OA : OA' :: PA : PA'.$$

Imaginons qu'on projette sur un plan quelconque le système des trois droites AA', BB', CC', ainsi que toutes les lignes de construction, et distinguons la projection d'un point, du point lui-même, en renversant la lettre qui le désigne. D'après cette convention, γ représentera la projection du point L, et ainsi des autres.

(*) Un quadrilatère complet est l'assemblage de quatre droites prolongées jusqu'à leurs rencontres respectives; et l'on nomme diagonale, la droite qui joint le point d'intersection de deux de ces droites, avec le point d'intersection des deux autres.

Digitized by Google

Cela posé, ceux des six points L, M, N, l, m, n, qui se trouvent sur une même droite, auront leurs projections placées aussi en ligne droite, en sorte que les six points $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{l}, \mathcal{m}, \mathcal{n}$ seront disposés sur quatre droites, de la même manière que le sont, dans l'espace, les points dont ils sont les projections.

III.

Il suit de là que lorsque les trois droites AA', BB', CC' sont tracées sur un même plan, les six points L, M, N, l, m, n sont encore disposés sur ce plan de telle sorte qu'en les prenant trois à trois dans l'ordre indiqué ci-dessus (I.), chacun de ces groupes de trois points appartient à une même droite.

IV.

S'il arrivait que trois des six points $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{l}, \mathcal{m}, \mathcal{n}$ (par exemple, $\mathcal{l}, \mathcal{m}, \mathcal{n}$), qui, en général, ne sont pas en ligne droite, vinssent à s'y trouver, comme cela indiquerait que le plan de projection se trouve perpendiculaire au plan XY, on en conclurait que ces six points sont tous placés sur une même ligne droite, et alors (II.) cette dernière ligne couperait chacune des trois droites AA', BB', CC', prolongées au besoin, en deux segmens proportionnels à ceux que forme le point P sur ces mêmes droites.

V.

On peut, à l'aide des considérations précédentes, démontrer plusieurs propriétés remarquables dont jouissent les courbes du second degré. Pour y parvenir, rappelons la proposition suivante :

(Fig. 3.) « Dans un hexagone quelconque $(ABCDEF)$ inscrit à » une section conique, les trois points de concours (H, I, K) des côtés » opposés se trouvent toujours placés en ligne droite. »

Ou plus généralement :

« Si sur le périmètre d'une section conique quelconque on prend à » volonté six points A, B, C, D, E, F, qu'on prolonge au besoin les » droites AB, AF, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les droites DE, DC,

Digitized by Google

» en *I*, *K* respectivement, les trois droites *IK*, *BC*, *FE* se croiseront » toutes en un même point. » (*Géométrie de position*, pag. 452).

VI.

(Fig. 4 et 5.) Alors ayant trois droites *AD*, *BE*, *CF*, inscrites dans une courbe du second degré, de manière à ce qu'elles concourent ou se coupent toutes en un même point *P*, si l'on effectue les constructions indiquées sur la figure, on voit, d'après le dernier théorème, que les trois points *H*, *I*, *K* sont placés en ligne droite; or cela n'a pas lieu lorsque ces trois droites *AD*, *BE*, *CF*, étant seulement assujetties à se croiser en un même point *P*, n'ont entre elles aucune autre relation: donc (IV.) les six points *H*, *I*, *K*, *h*, *i*, *k* sont tous situés sur une même droite qui divise les trois cordes *AD*, *BE*, *CF*, prolongées s'il le faut, chacune en deux segmens proportionnels à ceux que le point *P* forme sur ces mêmes cordes.

VII.

Supposons que l'une des trois cordes, par exemple *CF*, vienne à changer de grandeur, de manière cependant à conserver le point *P* sur sa direction; les deux points *I*, *i* resteront fixes, et les quatre nouveaux points *H*, *h*, *K*, *k* seront encore placés sur la droite indéfinie *Ii*. Donc, lorsque cette corde mobile *CF* s'appliquera sur l'une *BE*, de celles qui restent fixes, les droites *BF*, *EC* deviendront tangentes à la courbe, et auront leur point de concours *h'* placé sur *Ii*.

VIII.

Lorsque le point *P* est hors de l'aire de la section conique, il arrive un instant où les deux extrémités de la corde mobile se réunissent en un seul point *T*, placé sur le périmètre de la courbe et sur la droite *Ii*.

IX.

(Fig. 3.) Soit *abcdef* un hexagone quelconque circonscrit à une section conique, et *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *A*, les points de contact respectifs des côtés *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*:

Digitized by Google

1.° Les points de concours H, I, K des côtés opposés de l'hexagone inscrit $A\ B\ C\ D\ E\ F$, sont tous trois placés sur une même ligne droite (V.);

2.° Si l'on tire la diagonale cf qui rencontre la courbe aux deux points t, t', les droites Kt, Kt', seront tangentes en t, t', respectivement (VIII.); et il en est de même pour les autres diagonales;

3.° Si d'un point quelconque K de la droite HIK, on mène deux tangentes Kt, Kt' à la section conique, la corde tt', qui joint les deux points de contact, passe constamment par un même point P. (VII.).

Donc les trois diagonales fc, be, ad, se coupent toutes en un même point P, c'est-à-dire que:

« Dans un hexagone quelconque circonscrit à une section conique, » les trois diagonales se croisent en un même point. »

Ce dernier théorème est fécond en conséquences curieuses; en voici un exemple.

X.

(Fig. 6.) Supposons que deux des six points du contact, par exemple, A et B, viennent à se réunir en un seul B, le sommet a coïncidera aussi avec B, et la figure se réduira à un pentagone circonscrit $bcdef$; alors en appliquant le théorème précédent à ce cas particulier, on voit que les trois droites fc, be, dB, doivent se couper toutes en un même point P, c'est-à-dire que,

« Si, dans un pentagone quelconque *(bcdef)*, circonscrit à une courbe » du second ordre, on trace deux diagonales *(be, cf)* qui ne partent pas » d'un même angle, elles se croiseront en un point *(P)* situé sur la droite » *(dB)* qui joint le cinquième angle *(d)* avec le point de contact *(B)* » du côté opposé. »

Cette proposition donne sur-le-champ la solution du problème suivant.... Déterminer les points où cinq droites connues sont touchées par une même courbe du second degré..... Ces points une fois trouvés, on peut obtenir tous les autres points de la courbe par une

Digitized by Google

construction très-simple, et qui n'exige, ainsi que la première, d'autre instrument que la règle (VI.).

La section conique étant construite, on peut se proposer de lui mener une tangente par un point pris au-dehors ou sur le périmètre de la courbe; alors la construction s'effectue, comme les deux précédentes, sans l'intervention du compas, et, de plus, sans qu'il soit besoin de connaître autre chose que la trace de cette courbe (VII.), (VIII.).

XI.

Des Surfaces du second Degré.

(*Fig. I.*) Soit dans l'espace une surface courbe quelconque du second degré dans laquelle sont inscrites trois droites quelconques AA', BB', CC', qui se coupent ou concourent toutes en un même point P; en effectuant sur ces trois droites les constructions indiquées au n.° I, nous obtiendrons six points L, M, N, l, m, n, tous placés sur un même plan XY, qui jouit de la propriété de diviser les trois cordes AA', BB', CC', prolongées, s'il le faut, chacune en deux segmens proportionnels à ceux que le point P forme sur ces mêmes cordes (II.).

Cela posé, je dis que si par les deux extrémités A et A', de l'une quelconque AA', des trois cordes, on mène des plans tangens à la surface, la droite d'intersection de ces deux plans sera située sur le plan XY.

En effet, puisque par hypothèse, les trois cordes se croisent toutes au point P, deux quelconques d'entre elles, comme AA' et BB' sont dans un même plan; ce plan rencontre (n.° I.) celui XY, suivant la droite Ll, et va couper la surface suivant une courbe du second degré que je représente par $\overset{\frown}{AA'BB'}$, ce même plan coupe les deux plans tangens suivant des droites, qui touchent en A et A' la courbe $\overset{\frown}{AA'BB'}$, et qui (VII.) vont se rencontrer sur la droite Ll.

Digitized by Google

De même le plan des deux cordes AA', CC', rencontre le plan XY suivant la droite Mm, la surface suivant la section conique $\overset{\frown}{AA'CC'}$, et enfin les deux plans tangens suivant des droites, qui touchent en A et A' la courbe $\overset{\frown}{AA'CC'}$, et vont se croiser sur la droite Mm.

Ainsi la droite d'intersection des deux plans tangens à la surface en A et A', a deux de ses points placés sur le plan XY, savoir l'un sur Ll, l'autre sur Mm; cette droite d'intersection est donc entièrement située sur le plan XY (*).

XII.

Il suit de là que l'une des trois cordes (CC', par exemple) peut changer de position et prendre une grandeur quelconque sans que les nouveaux points M, m, N, n, sortent du plan XY, pourvu toutefois que cette corde CC' conserve, dans son mouvement, le point P sur sa direction; en effet, le plan XY est suffisamment déterminé par les deux cordes AA', BB', puisque d'une part on a les deux points fixes L, l, qui appartiennent à ce plan, et que de l'autre la droite d'intersection des deux plans tangens à la surface en A et A', ou celle des deux plans tangens en B et B', doivent se trouver sur le même plan XY.

Quelle que soit donc la grandeur et la disposition des trois cordes AA', BB', CC', assujetties à se croiser toutes au point P supposé fixe, le plan XY reste le même, c'est-à-dire, que la position de ce plan XY dépend seulement de celle du point P.

XIII.

Supposons que DD' représente la corde CC' dans l'une des positions

(*) On peut tout de suite conclure de là que, lorsque quatre points (A, A', B, B') pris sur une surface du second degré, sont dans un même plan, les plans tangens à la surface, menés par ces points, vont se couper tous quatre en un même point : ce qui est une autre manière de démontrer le théorème (XIV.).

Digitized by Google

qu'elle a pu prendre après s'être déplacée, il suit des remarques précédentes, que si les quatre points A, B, C, D sont dans un même plan, les quatre points A', B', C', D' seront aussi placés sur un même plan; ce qui conduit à ce théorème:

« Lorsqu'une surface courbe du second ordre est pénétrée par une » surface conique, et que la courbe d'intersection a deux branches iso- » lées, si l'une de ces branches a tous ses points situés sur un même » plan, l'autre jouit de la même propriété. »

XIV.

Si le point P est situé au-dehors de la surface, il pourra arriver que la corde CC', en changeant de grandeur, devienne nulle, et tous les points de la surface où cette circonstance aura lieu appartiendront au plan XY. Donc,

« Pour toute surface du second degré, la courbe du contact avec une » surface conique circonscrite, est toujours plane. »

XV.

Il résulte des considérations précédentes, que,

1.° Le plan XY est déterminé lorsque le point P est donné, et réciproquement;

2.° Si par le point P on mène une droite quelconque qui rencontre le plan XY en O, et la surface aux deux points A, A', les deux segmens PA, PA' formés sur la corde AA' par le point P, sont proportionnels à ceux OA, OA', formés sur la même corde par le plan XY;

3.° Lorsque le point P est dans l'intérieur de la surface, le plan XY n'en rencontre aucune des nappes, et qu'au contraire ce plan XY coupe nécessairement la surface lorsque P est situé au-dehors;

4.° Si par le point fixe P, placé comme on voudra dans l'espace, on mène un plan quelconque qui aille couper la surface du second degré suivant une certaine courbe, le cône qui enveloppera la surface, en la touchant

Digitized by Google

touchant suivant cette courbe, aura son sommet situé sur le plan XY(*). Cette propriété peut s'énoncer ainsi :

« Étant données dans l'espace une surface courbe quelconque du » second ordre, et une surface conique circonscrite qui la touche, et dont » le sommet soit en un point quelconque; si la surface conique se » meut sans cesser d'être circonscrite à la première surface, et de la tou- » cher, de manière cependant que son sommet parcoure un plan quel- » conque *(XY)*, le plan de la courbe de contact des deux surfaces pas- » sera toujours par un même point *(P)*, » (*Géométrie descriptive de Monge*, page 52.)

XVI.

Quand le point P est situé au-dehors de la surface, nous avons vu que le plan XY est le même que le plan de la courbe de contact de cette surface, avec la surface conique circonscrite, dont le sommet est en P. Ainsi, lorsqu'une surface conique enveloppe une surface de second ordre en la touchant, si de son sommet P on dirige une droite quelconque qui perce la surface aux deux points A, A', et le plan de la courbe de contact au point O, on aura $PA : PA' :: OA : OA'$; en sorte que si cette droite se trouve être un diamètre de la surface courbe, en supposant que cette surface ait un centre C, on aura, pour ce cas, $\overline{CA'}^2 = \overline{CA}^2 = CP.CO$: mais si la surface est dépourvue de centre, comme alors on a PA' et OA' infinies, il vient $PA = OA$. Dans les deux cas, ce point particulier O est le centre de la courbe de contact.

XVII.

De plus, en supposant toujours que la droite qui part du sommet P soit quelconque, les deux plans tangens à la surface, menés par les points A et A', vont se couper suivant une droite xy, placée sur le plan XY; en sorte que lorsque cette droite arbitraire PAA' est un diamètre de

(*) Si la surface du second degré est de révolution, et que le point P en soit un des foyers, la distance d'un point quelconque de cette surface au plan XY, et celle du même point au foyer P, ont entre elles un rapport constant.

Digitized by Google

la surface, les deux plans tangens en A et A', sont parallèles entre eux, et parallèles au plan XY de la courbe de contact.

XVIII.

Enfin, considérons seulement l'un de ces deux plans tangens, par exemple, celui dont le point de contact avec la surface courbe est A. Ce plan contient le point A et la droite xy, et coupe le cône circonscrit suivant une section conique; alors si d'un point quelconque de la droite xy on mène deux tangentes à cette section conique, la corde qui joindra les deux points de contact passera toujours par le point A.

XIX.

Reprenons le cas (XV, 4.°) où une surface du second ordre est enveloppée par une surface conique qui la touche, et dont le sommet parcourt un plan quelconque XY. Nous savons qu'alors tous les *plans de contact* se coupent en un même point P; et si nous supposons que le plan XY s'incline dans un sens quelconque en se mouvant sur l'un de ses points O, regardé comme fixe, le point P changera de position dans l'espace: mais comme, quelque situation qu'ait ce point P, en le joignant avec le point fixe O par une droite qui aille rencontrer en A et A' la surface courbe, on a $PA:PA'::OA:OA'$, il s'ensuit (XV, 2.°) que le point P décrit une surface plane en se mouvant.

XX.

Ayant une surface du second degré douée d'un centre C, si de ce centre on mène tant de droites qu'on voudra qui aillent se terminer à la surface, et qu'on divise tous ces demi-diamètres dans un même rapport, la surface qui unit entre eux tous les points de division est semblable à la première, comme on peut le démontrer géométriquement; mais cette proposition devient évidente en la considérant analytiquement, puisque la construction précédente revient à substituer Kx, Ky, Kz pour x, y, z, respectivement, dans l'équation de la surface donnée, rapportée à ses axes.

Digitized by Google

XXI.

Il suit de la construction qui vient d'être indiquée, que les deux surfaces semblables sont telles, que si, par leur centre commun C, on mène une droite quelconque qui aille percer la première en z et la seconde en z', les plans tangens menés par ces points z et z' sont parallèles entre eux.

Cela posé, imaginons qu'un point quelconque P de la surface extérieure soit le sommet d'une surface conique circonscrite à la seconde; si l'on joint ce sommet P avec le centre C, par une droite qui aille rencontrer la surface enveloppée en A et le plan de contact en O, on aura (XVI) $\overline{CA}^2 = CP.CO$, ou $CA:CP::CO:CA$. Or le rapport $CA:CP$ est toujours le même, quelque part qu'on ait pris le point P; donc aussi le rapport $CO:CA$ est constant; donc le point O est placé sur une troisième surface du second degré, semblable aux deux premières, et ayant chacun de ses axes troisième proportionnel aux deux axes correspondans de la surface extérieure et de la surface moyenne.

On sait (XVII) que le plan qui touche en A la surface moyenne est parallèle à celui de la courbe du contact; donc ce plan de contact est lui-même tangent en O à la troisième surface. Ainsi, pendant que le sommet P parcourt la surface extérieure, le plan de la courbe du contact roule sur la troisième surface (*).

Cette dernière proposition a déjà été démontrée par l'analyse; elle se trouve annoncée dans le n.° 4 de la *Correspondance sur l'École polytechnique*, d'où je l'ai empruntée. Elle n'est, comme on va le voir, qu'un cas particulier d'une autre beaucoup plus générale.

(*) Nous avons supposé qu'il s'agissait de surfaces douées d'un centre; mais s'il arrivait qu'elles en fussent dépourvues, la proposition n'en aurait pas moins lieu; alors les trois surfaces sont asymptotes l'une de l'autre, et toute droite parallèle à leur axe commun, et terminée d'une part à la surface extérieure, et de l'autre à la surface intérieure, est divisée en deux parties égales par la surface moyenne; enfin, chacun des paramètres de cette surface moyenne est moyen proportionnel entre les deux paramètres correspondans des deux autres surfaces.

Digitized by Google

XXII.

Théorème général.

« Étant données une surface courbe quelconque du second degré, et » une surface conique circonscrite qui la touche, et dont le sommet soit » en un point quelconque, si la surface conique se meut sans cesser d'être » circonscrite à la première surface, et de la toucher, de manière cepen- » dant que son sommet parcoure une autre surface quelconque du » second ordre, disposée arbitrairement dans l'espace, le plan de la » courbe de contact des deux surfaces touchera toujours une même troi- » sième surface du second degré. »

Démonstration.

Soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz = K \ldots\ldots (1)$$

l'équation de la surface donnée, enveloppée par la surface conique mobile ;

Représentons la surface que parcourt le sommet par

$$Ma^2 + Nb^2 + Pc^2 = Q \ldots\ldots (2),$$

a, b, c en étant les coordonnées courantes,

L'on conçoit la surface conique qui, ayant pour sommet un point quelconque (a, b, c) de cette surface directrice (2), envelopperait la surface (1) en la touchant, on sait *(Feuilles d'Analyse de Monge, n.° 5.)* que la courbe du contact se trouve située sur la surface

$$z - c = (x - a)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - b)\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots\ldots (3),$$

dans laquelle $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ sont données par l'équation (1).

Le système des équations (1) et (3) représente donc la courbe du contact ; or, en prenant la différence de ces deux équations, l'on obtient celle-ci :

$$x(Aa + Fb + Ec + G) + y(Fa + Bb + Dc + H) + z(Ea + Db + Cc + I) + Ga + Hb + Ic + K = 0,$$

Digitized by Google

qui est linéaire et qui représente le plan sur lequel est placée cette courbe de contact.

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme plus simple,

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta = 0 \ldots\ldots (4),$$

en faisant, pour abréger,

$$Ax+Fy+Ez+G=\alpha,\ Fx+By+Dz+H=\beta,\ Ex+Dy+Cz+I=\gamma,\ Gx+Hy+Iz+K=\delta;$$

Cela posé, imaginons que le sommet du cône, demeurant toujours sur la surface directrice (2), s'écarte infiniment peu, et dans une direction quelconque, du point (a, b, c) de cette surface; alors le plan (4) de la courbe du contact prendra une position infiniment voisine de celle qu'il avait d'abord; et si, dans l'équation (4), nous faisons varier a, b, c en y regardant x, y, z comme constantes, ce sera supposer que ces coordonnées x, y, z appartiennent à la droite d'intersection des deux plans de contact consécutifs : on aura donc, pour les x, y, z de cette droite seulement,

$$\alpha da + \beta db + \gamma dc = 0.$$

Maintenant il faut écrire que le sommet mobile doit toujours se trouver sur une surface connue, c'est-à-dire, que les coordonnées a, b, c de ce sommet sont liées entre elles par l'équation (2), laquelle donne, en la différenciant,

$$Mada + Nbdb + Pcdc = 0.$$

Éliminant dc de ces deux équations différentielles, il vient

$$(M a\gamma - Pc\alpha)da + (Nb\gamma - Pc\beta)db = 0.$$

Or le sommet (a, b, c) ayant pu se déplacer en suivant une direction quelconque, le rapport $da:db$ est une quantité arbitraire qui peut être aussi grande ou aussi petite qu'on voudra. La dernière équation exige donc qu'on ait séparément

$$M a\gamma - Pc\alpha = 0 \ldots (5),\quad Nb\gamma - Pc\beta = 0 \ldots (6);$$

alors les coordonnées x, y, z, dont $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions, appartiennent au *point particulier* du plan (4) qui lui est commun avec deux

Digitized by Google

autres plans de contact consécutifs et quelconques. On a, pour déterminer ce point particulier (x, y, z), les trois équations linéaires (4), (5), (6).

Ainsi, le plan de contact (4), dont le mouvement est assujetti à celui du sommet, touche en ce point (x, y, z) une certaine surface qu'il s'agit maintenant de déterminer.

Pour parvenir à l'équation de cette surface, qui est le lieu de tous les points (x, y, z), déterminés comme précédemment, il faut éliminer les trois quantités a, b, c entre les quatre équations

$$(2)\ldots Ma^2 + Nb^2 + Pc^2 = Q, \quad (4)\ldots \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta = 0,$$
$$(5)\ldots Ma\gamma - Pc\alpha = 0, \qquad (6)\ldots Nb\gamma - Pc\beta = 0;$$

et l'équation résultante en x, y, z est celle de la surface cherchée, puisqu'elle exprime la relation qui existe entre les trois coordonnées du point (x, y, z), quelque part que soit le sommet mobile sur la surface directrice (2).

En effectuant le calcul qui se fait sur-le-champ, on trouve pour résultante l'équation du second degré,

$$MNP\delta^2 = Q(NP\alpha^2 + MP\beta^2 + MN\gamma^2)\ldots(7).$$

Donc, pendant que le sommet parcourt la surface courbe (2), le plan de contact roule sur une surface du second ordre, déterminée par l'équation (7), ce qu'il fallait démontrer.

XXIII.

Il existe une relation remarquable entre la surface qui dirige le mouvement du sommet et celle que le plan de contact touche dans toutes ses positions. Lorsque la première est susceptible d'être engendrée par une ligne droite, la seconde jouit de la même propriété.

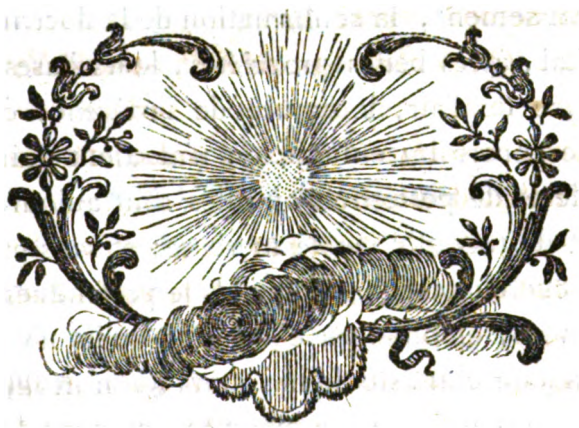
XXIV.

Si le sommet de la surface conique, au lieu de parcourir une surface, se meut en glissant sur une courbe quelconque tracée dans l'espace, en vertu du mouvement continu auquel il est alors assujetti, le plan de contact, dans toutes ses positions, touche une même surface développable, tandis que, dans le premier cas, ce plan roulait sur une surface à deux courbures.

Digitized by Google

Supposons, par exemple, que cette courbe directrice résulte de l'intersection d'une surface du second ordre par un plan ; d'une part (XV, 4.°), le plan de contact doit alors passer constamment par un même point ; de l'autre (XXII), il doit toucher une même surface du second degré : donc (XIV) la surface enveloppe de l'espace parcouru par le plan de contact est, dans ce cas, une surface conique du second degré (théorème énoncé dans le n.° 4 de la *Correspondance*).

Ce dernier théorème peut se démontrer directement et d'une manière simple, par des considérations purement géométriques.



Digitized by Google

CHIMIE.

Recherches sur les Oxides et sur les Sels de mercure (*),

Par MM. Fourcroy et Thenard.

PREMIER MÉMOIRE.

INTRODUCTION.

L'histoire du mercure semble être liée d'une manière particulière à toutes les époques de la physique et à toutes les grandes découvertes qui ont marqué ces époques. La théorie du vide, la pesanteur de l'air, la météorologie, la distinction des gaz, leur séparation, et sur-tout la naissance, l'accroissement, la confirmation de la doctrine pneumatique, doivent à ce métal, à ses belles propriétés, leurs bases les plus solides. Sans lui, l'analyse de l'air, la nature de l'oxigène, celle des acides, seraient peut-être encore inconnues, ou n'auraient point été portées au point d'exactitude et de perfection où elles sont aujourd'hui; aussi tous les chimistes ont-ils travaillé sur le mercure; et sans parler de ceux des alchimistes qui, cherchant dans ce métal de prétendues propriétés qu'ils n'y ont pas trouvées, en ont trouvé d'autres qu'ils n'y cherchaient pas, il n'est presque aucun chimiste de nos jours qui n'ait fait des recherches, plus ou moins étendues, sur le mercure, et pour lesquels il ne soit devenu la source de plusieurs découvertes plus ou moins intéressantes.

Malgré ces nombreux travaux, il s'en faut encore de beaucoup que la connaissance des propriétés chimiques du mercure puisse être regardée comme complète; il n'est même, pour ainsi dire, aucun des composés

(*) Ces recherches sont terminées depuis cinq ans; les deux premiers Mémoires auxquels elles ont donné lieu, ont été lus à l'Institut il y a environ trois ans; les deux autres l'ont été peu de temps après à la Société philomatique. Différentes raisons en ont retardé la publication.

dans

Digitized by Google

dans lesquels il entre, qui ait été étudié avec tout le soin qu'il mérite, ou qui ne laisse rien à desirer. C'est ce qui nous a engagés, M. *Thenard* et moi, à faire sur le mercure le travail dont nous allons entretenir l'Institut, et que nous partagerons en six ordres, qui feront l'objet d'autant de paragraphes particuliers.

Dans le premier, nous exposerons l'analyse et les propriétés des diverses espèces d'oxide de mercure.

Dans le second, nous parlerons des différens composés fulminans, ou poudres fulminantes, dont le mercure fait partie.

Le troisième sera consacré à l'histoire des sulfates de ce métal.

Le quatrième aura pour objet la nature et la différence des nitrates, ainsi que des nitrites de mercure, qu'on a souvent confondus avec les nitrates.

Nous décrirons dans le cinquième ce que nous ont présenté de nouveau les muriates de mercure, et nous y ferons connaître une nouvelle espèce très-singulière de ce genre de sel.

Enfin, dans le sixième, nous traiterons des sulfures de mercure.

§. I.er

Des Oxides de mercure.

Il n'existe que deux oxides de mercure, l'oxide noir et l'oxide rouge. L'oxide noir s'obtient pur, en précipitant, par un excès de potasse ou de soude, une dissolution de mercure, faite, sans le secours de la chaleur, dans l'acide nitrique à 16 degrés. Lorsqu'on chauffe doucement cet oxide, il se transforme en oxide rouge et en métal. Ce passage même se fait en partie à la température ordinaire, puisque de l'oxide noir abandonné à lui-même, sur-tout en été, ne tarde point à offrir plusieurs petits globules métalliques, et des traces très-sensibles d'oxide très-oxidé, qu'on reconnaît très-aisément en traitant cet oxide noir par l'acide muriatique, et en versant ensuite de l'ammoniaque dans la liqueur; on y produit ainsi un précipité blanc, qui, comme on le sait, n'a lieu qu'avec les sels mercuriels oxigénés. Cet effet qu'éprouve l'oxide noir, avec le temps, est encore

Digitized by Google

plus prompt si cet oxide a été précipité de la dissolution nitrique par l'ammoniaque : c'est qu'alors l'oxide retient un peu d'alcali et d'acide, ce qui n'arrive pas quand on se sert d'alcali fixe; et comme il existe une grande attraction entre l'oxide très-oxidé de mercure, un acide quelconque et l'ammoniaque, il en résulte que, dans ce cas, la puissance décomposante est plus grande.

Mais si on soumet à une assez haute température l'oxide noir de mercure, il se réduit complétement. Cette réduction se fait très-commodément dans une petite cornue dont le col s'engage sous une cloche pleine d'eau. Elle commence à avoir lieu aussitôt que le fond de la cornue est rouge; le mercure, ainsi que l'oxigène, passent dans le récipient. On retire, par ce moyen, de cent parties d'oxide, quatre-vingt-seize parties de mercure et quatre parties d'oxigène. L'oxide noir de mercure ne présente d'ailleurs rien de particulier.

L'oxide rouge de mercure, obtenu ou par la calcination du mercure métallique ou par celle du nitrate mercuriel, contient o,o8 d'oxigène; on l'analyse comme le précédent, en le décomposant par le feu. L'oxide, quoique jaune, qu'on précipite des sels très-oxidés de mercure, par la potasse, par la soude, par la chaux, la barite et la strontiane, est encore dans le même cas; il contient aussi o,o8 d'oxigène, puisqu'il ne renferme pas de traces d'acide. Sa couleur tient, à ce qu'il paraît, à la grande division de ses molécules; et en effet on jaunit jusqu'à un certain point le précipité rouge en le triturant.

L'oxide rouge de mercure semble être insipide lorsqu'on le met sur la langue; mais en l'y laissant quelque temps, on y reconnaît une saveur âpre et désagréable qui fait beaucoup cracher, et qui annonce une action puissante sur les organes vivans. Cet oxide est sensiblement dissoluble dans l'eau. On peut le précipiter de cette dissolution en noir par l'hydrogène sulfuré, et en blanc par l'ammoniaque. Ce dernier précipité est une espèce de poudre fulminante, comme nous le dirons bientôt.

Il est peu de corps combustibles, comme on le sait, que l'oxide rouge de mercure n'attaque plus ou moins fortement à une haute température;

Digitized by Google

mais il en est même parmi les métaux sur lesquels il exerce une action si puissante, que la combustion a lieu avec une vive lumière et un grand dégagement de chaleur; de ce nombre sont l'étain lorsqu'il est fondu, et le zinc bien avant de l'être.

De tous les acides, il n'en est qu'un, l'acide muriatique oxigéné, qui ne se combine avec l'oxide rouge de mercure qu'en subissant une décomposition, d'où il résulte des phénomènes tout particuliers, que nous examinerons à l'article *Muriates.*

Il n'y a ni oxide gris ni oxide blanc de mercure. L'oxide gris n'est que du mercure très-divisé, ou un mélange d'oxide noir et de mercure, ou plus souvent encore une combinaison d'acide avec un excès d'oxide noir de mercure. On obtient facilement cette dernière combinaison en versant peu d'alcali dans du nitrate de mercure faiblement oxigéné.

L'existence de l'oxide blanc de mercure n'a jamais été admise que par quelques chimistes. Parce que les dissolutions de mercure sont sans couleur, on croyait que l'oxide qu'elles contenaient était lui-même incolore; mais une foule d'expériences et le raisonnement lui-même démontrent qu'il ne faut pas juger de la couleur de l'oxide d'un sel par celle de la dissolution de ce sel : les dissolutions mercurielles peuvent être citées comme une des preuves les plus frappantes de cette vérité.

§. II.

Des Préparations ou Poudres de mercure fulminantes.

On ne connaissait jusqu'ici que deux espèces de poudres de mercure fulminantes : l'une, découverte par *Bayeu*, est formée des précipités de mercure, mêlés avec le soufre; l'autre est la préparation due à M. *Howard*, et qui résulte d'une dissolution nitrique de mercure, mêlée avec de l'alcool. Nous en avons découvert une troisième, qui est une combinaison d'oxide de mercure et d'ammoniaque. Nous allons traiter successivement de ces trois poudres fulminantes, de leur nature et de leurs propriétés comparées.

Les précipités de mercure triturés avec du soufre ne détonnent par la chaleur qu'autant qu'ils sont très-oxidés; il faut qu'ils soient à l'état d'oxide

Digitized by Google

rouge pour produire fortement cet effet : l'oxide noir ne présente que faiblement une pareille propriété. *Bayeu*, qui n'avait qu'entrevu cette différence entre les divers oxides, n'avait pas pu en déterminer la cause.

On a déjà parlé plusieurs fois en France du précipité fulminant de M. *Howard* ; M. *Berthollet* s'en est spécialement occupé, et il en a donné une analyse différente de celle du chimiste anglais. Les recherches que nous avons faites nous ont montré que l'une et l'autre des analyses de ces deux chimistes sont vraies et exactes, parce qu'elles peuvent s'appliquer à deux précipités différens, qu'on obtient en effet, suivant la méthode que l'on suit dans la préparation de ces composés. Nous allons décrire le procédé de M. *Howard*, indiquer les résultats de M. *Berthollet;* nous dirons ensuite ce qui résulte de nos expériences sur cette préparation.

Pour faire la poudre fulminante, M. *Howard* recommande de prendre une partie de mercure, 7 $\frac{1}{2}$ d'acide nitrique à 30 degrés, et 11 $\frac{1}{2}$ parties d'alcool bien rectifié. On dissout d'abord le mercure dans l'acide nitrique; on ajoute l'alcool à la dissolution mercurielle, et on fait chauffer jusqu'à ce que la liqueur commence à entrer en ébullition : on entretient cette ébullition pendant quelques minutes, et alors on retire le vase du feu. Par le refroidissement, il se précipite une poussière grise blanchâtre, qui est la poudre fulminante. Cette poudre détone par le choc aussi fortement qu'un mélange de muriate suroxigéné de potasse et de soufre; projetée sur des charbons rouges, elle s'enflamme tout-à-coup avec une légère explosion et une lumière vive d'un bleu tendre. M. *Howard* la dit composée sur 100 parties, comme il suit:

D'acide oxalique.....	21,28.
De mercure.....	64,72.
De gaz nitreux éthéré et oxigène uni au mercure.	14,00.
	100,00.

M. *Berthollet*, qui a repris les expériences de M. *Howard*, ne les a pas trouvées exactes. Il a assuré, d'après son analyse, que la poudre

Digitized by Google

fulminante est un composé d'oxide de mercure, d'ammoniaque et d'une matière végétale particulière, produite par la décomposition de l'alcool (*).

Des expériences répétées plusieurs fois sur la préparation de la poudre fulminante de M. *Howard*, nous ont prouvé que cette poudre varie dans sa nature et dans ses effets, selon que l'on entretient l'ébullition du mélange plus ou moins long-temps. Nous avons fait trois poudres différentes l'une de l'autre, en nous servant des doses indiquées par M. *Howard*, et en variant seulement le procédé sous le rapport de l'action du feu. Nous décrirons ici ces trois poudres, soit pour déterminer la manière de les obtenir, soit pour faire connaître les propriétés distinctives de la nature de chacune d'elles.

Première espèce de Poudre peu fulminante.

Lorsqu'on chauffe quelques instans seulement et sans le faire bouillir, le mélange de dissolution nitrique mercuriel et d'alcool prescrit par M. *Howard*, il s'en précipite par le refroidissement une poudre grise, quelquefois en grains cristallins, souvent en très-beaux cristaux de dix à douze millimètres de longueur et de largeur, sur quatre ou cinq millimètres d'épaisseur. Cette poudre cristalline ou ces cristaux lamelleux prismatiques ne fulminent point par le choc; ils ne fulminent que par la chaleur. Chauffée avec précaution dans une cornue de verre, il s'est fait, au moment où le vaisseau était sur le point de rougir, une forte détonation qui a brisé la cornue en mille pièces. En la traitant par la potasse, il n'y a point eu d'odeur ammoniacale sensible; la liqueur évaporée a fourni du nitrate de potasse sans précipiter par les sels calcaires, et il en est resté de l'oxide de mercure pur sur le filtre. Une autre portion de cette poudre a été traitée par l'acide muriatique; la liqueur filtrée a laissé du mercure doux, et contenait du muriate oxigéné ou corrosif, puisqu'elle précipitait en jaune rougeâtre par la potasse. La chaux n'en a point dégagé d'ammoniaque. En chauffant la poudre avec de l'acide

(*) Cette notice sur les expériences de M. *Berthollet*, est tirée du n.° de la société philomathique, et celles sur les expériences de M. *Howard*, des n.os 114, 115 et 116 de la *Bibliothèque Britannique*.

Digitized by Google

sulfurique faible, on a eu du gaz acide carbonique et du gaz oxide de carbone ; ainsi l'on y a trouvé de l'acide nitrique, de l'oxide de mercure, une matière végétale sans acide oxalique et sans ammoniaque.

Seconde espèce de Poudre très-fulminante.

Le mélange de dissolution nitrique de mercure et d'alcool porté jusqu'à l'ébullition, et celle-ci entretenue quelques minutes, nous a constamment donné, par le refroidissement, une poudre qui a pris plusieurs fois la forme de longues et belles aiguilles cristallines. Celle-ci est la poudre réellement fulminante de M. *Howard.* Elle détone fortement par le choc ; jetée sur des charbons rouges, elle brûle avec une flamme d'un bleu tendre, accompagnée d'une légère explosion.

Cette seconde espèce de préparation ne contient pas d'acide nitrique ; elle n'a point fourni de nitre avec la potasse, ni de dégagement d'ammoniaque par cet alcali (*).

L'acide muriatique l'a convertie en mercure doux qui s'est précipité, et en muriate oxigéné de mercure et d'ammoniaque qui s'est dissous. Nous n'y avons pas trouvé de traces d'acide oxalique ; mais nous y avons reconnu la matière végétale particulière indiquée par M. *Berthollet,* et elle y est beaucoup plus abondante que dans la poudre précédente. Cette matière particulière joue certainement le principal rôle dans la détonation de la poudre par le choc ; c'est elle qui forme l'acide carbonique et l'eau, principaux produits de cette détonation : l'ammoniaque y contribue aussi. Elle diffère donc de la première poudre peu fulminante, en ce qu'elle contient de l'ammoniaque, de l'oxide de mercure et plus de matière végétale, en ce qu'elle ne contient pas d'acide nitrique : c'est celle dont M. *Berthollet* a donné l'analyse.

(*) Quoique cette poudre contienne de l'ammoniaque, la potasse ne peut pas la rendre sensible, puisque la potasse ne se combine point avec l'oxide de mercure, et que c'est avec cet oxide que l'ammoniaque se trouve uni ; mais si avant de traiter la poudre par l'alcali fixe, on la traite d'abord par l'acide muriatique, le dégagement d'alcali volatil se fait bientôt sentir.

Digitized by Google

Troisième espèce de Poudre non fulminante.

En soutenant pendant une demi-heure l'ébullition du nitrate de mercure et de l'alcool, il ne s'en dépose point de poudre grise, mais une poudre jaune non cristalline par le refroidissement : on aperçoit du mercure réduit plus que dans l'opération précédente, où l'on en voit aussi, tandis que le même phénomène n'a pas lieu dans la préparation de la première. La poudre jaune ainsi obtenue ne détone ni par le choc ni par la chaleur; elle ne contient ni acide nitrique ni ammoniaque : les réactifs ci-dessus énoncés n'en montrent nulle trace; on y trouve au contraire de l'acide oxalique ; on n'y rencontre que très-peu de la matière végétale décrite dans l'analyse des deux précédentes : il paraît qu'elle a été détruite par la longue ébullition, et qu'elle a donné naissance à l'acide oxalique, ainsi qu'à la réduction de l'oxide de mercure.

Projetée sur des charbons bien allumés, cette poudre jaune fait entendre un petit bruit, mais rien qui puisse être comparé aux détonations des deux premières; elle semblait n'être qu'un oxalate de mercure.

On peut conclure de ces faits réunis que, suivant la manière dont on traite la dissolution nitrique de mercure et l'alcool, on forme des composés différens, et qui sont, dans leur succession, constitués comme il suit:

La première poudre est formée
D'acide nitrique,
D'oxide de mercure,
D'un peu de matière végétale particulière.

La seconde poudre est composée
D'oxide de mercure,
De matière végétale plus abondante,
D'ammoniaque.

La troisième poudre contient
De l'oxide de mercure,
De l'acide oxalique,
Très-peu de matière végétale.

Digitized by Google

II.^e MÉMOIRE SUR LE MERCURE.

§. III.

Des Sulfates, des Nitrates et des Nitrites de mercure.

La nouvelle préparation fulminante de mercure qui a été découverte dans la suite de nos recherches, consiste, comme je l'ai déjà dit, dans une combinaison de l'oxide de mercure rouge avec l'ammoniaque. Nous l'avons obtenue en faisant digérer de l'ammoniaque liquide, très-forte et bien saturée, sur de l'oxide rouge de mercure, pendant huit à dix jours. L'oxide se recouvre peu à peu d'une poudre d'abord blanche jaunâtre, qui passe par la suite à un blanc assez beau. En prolongeant la digestion jusqu'à quinze jours, la poussière blanche augmente et donne des cristaux lamelleux brillans, dont la petitesse et la minceur ne permettent pas de déterminer la forme. La poussière et les lames qui lui succèdent, mises sur des charbons bien ardens, détonent presque aussi fortement que l'or fulminant. Si la température n'est pas assez élevée, l'ammoniaque se dégage sans être décomposée. Pour que la fulmination soit forte, il faut que la poudre soit réunie en petites masses ou pelotons, et que les charbons sur lesquels on la place soient bien allumés; sans ces conditions, la poudre ne fait que décrépiter par parcelles. Cette poudre a la propriété de se décomposer spontanément lorsqu'on la garde quelque temps après sa préparation; trois jours suffisent pour cette décomposition complète : le résidu est de l'oxide rouge de mercure. Une chaleur douce opère la même décomposition, dégage l'ammoniaque, et laisse l'oxide rouge de mercure isolé. La potasse, la soude et les autres bases salifiables n'ont aucune action sur la poudre fulminante d'oxide de mercure ammoniacal. Les acides sulfurique, nitrique et muriatique, décomposent l'oxide de mercure ammoniacal fulminant; ils le convertissent en deux sels ammoniaco-mercuriels, l'un dissoluble et cristallisable, l'autre indissoluble et pulvérulent.

Ainsi le mercure doit être placé dans le rang des métaux dont les oxides,

Digitized by Google

oxides, unis à l'ammoniaque, ont pour caractère de fulminer en se décomposant et en décomposant l'alcali volatil. Il serait tout-à-fait superflu de s'occuper ici de la théorie de cette fulmination, puisqu'elle est absolument la même que celle des oxides d'or et d'argent ammoniacaux. Ce composé fulminant diffère sur-tout de ceux d'or et d'argent, parce qu'il n'est pas permanent, parce qu'il perd assez promptement sa nature en laissant échapper l'ammoniaque qu'il contient. Il paraît donc qu'il y a beaucoup moins d'adhérence entre l'oxide de mercure et l'ammoniaque qu'entre les oxides d'or et d'argent et la même espèce d'alcali.

Des Sels mercuriels.

On se rappelle qu'il existe deux oxides de mercure, l'oxide noir et l'oxide rouge. Non-seulement chacun de ces oxides peut se combiner avec les divers acides, mais il arrive souvent que chacun d'eux peut s'y combiner en plusieurs proportions, de sorte que le nombre des sels mercuriels est très-considérable.

Des Sulfates de mercure.

Nous avons reconnu quatre sulfates de mercure; savoir, un sulfate neutre de mercure peu oxidé, ou dans lequel l'oxide est noir, et trois sulfates de mercure très-oxidés, dont l'un est neutre, l'autre acidule, et le troisième acide.

Le premier, ou le sulfate neutre de mercure au *minimum* d'oxidation, peut s'obtenir en faisant bouillir pendant quelque temps sur du mercure de l'acide sulfurique à 50 degrés, et lavant ensuite à grande eau le précipité qui s'est formé; mais on court le risque presqu'inévitable de l'avoir mêlé de sulfate très-oxidé : il vaut beaucoup mieux, et ce procédé est à l'abri de tout soupçon, verser de l'acide sulfurique dans une dissolution de mercure faite à froid. Il ne se précipite jamais, dans ce cas, que du sulfate peu oxidé, quand bien même le nitrate contiendrait une portion d'oxide rouge de mercure.

Digitized by Google

Ce sulfate ne se dissout pas sensiblement, ou ne se dissout que très-peu, au moins dans un excès d'acide. Il est toujours neutre; et si par hasard il rougit la teinture de tournesol, ce n'est que par l'effet d'un acide avec lequel il est seulement mêlé, et que la plus petite quantité d'eau emporte sans oxide mercuriel. Il n'éprouve aucune espèce d'altération de la part de l'eau; qu'elle soit froide ou chaude, il reste blanc. Toutes les bases salifiables solubles, sans exception, le décomposent et en séparent l'oxide noir; elles agissent de la même manière sur tous les sels de mercure peu oxidés. Calciné avec du sel marin, il donne du mercure et beaucoup plus de sublimé corrosif que de mercure doux; cependant on verra, à l'article *Muriates*, que le sublimé corrosif, chauffé avec de l'oxide rouge de mercure, donne du mercure, de l'oxigène, et beaucoup plus de mercure doux que de sublimé corrosif. Ces phénomènes dépendent sans doute de la quantité d'acide et de base qui sont en présence l'un de l'autre; car le mercure doux contient beaucoup plus d'oxide de mercure que le sublimé corrosif, et celui-ci beaucoup plus d'acide que le premier.

Les trois autres sulfates de mercure se font très-bien en faisant bouillir pendant long-temps de l'acide sulfurique concentré sur ce métal, et poussant l'évaporation jusqu'au point d'obtenir une masse blanche de la consistance d'une bouillie très-épaisse. Cette masse blanche doit être considérée, en grande partie au moins, comme un sulfate acidule très-oxidé, dont le principal caractère est de se transformer, lorsqu'on le traite, soit par l'eau chaude, soit par l'eau froide, en sulfate neutre très-oxidé, d'un beau jaune serein et insoluble, et en sulfate acide aussi très-oxidé, soluble dans l'eau.

On donne également naissance à ces trois sels au moyen de l'oxide rouge de mercure et de l'acide sulfurique. En employant beaucoup d'oxide rouge de mercure et peu d'acide sulfurique, on forme le premier; avec moins d'oxide rouge de mercure et la même quantité d'acide, on obtient le second; et enfin en diminuant encore la dose d'oxide rouge, et conservant toujours celle d'acide, il en résulte le troisième.

Digitized by Google

Le premier, le sulfate neutre de mercure très-oxidé, s'obtient encore très-bien en versant du sulfate de soude ou de potasse dans du nitrate de mercure oxigéné, saturé, autant que possible, d'oxide. Lorsqu'on substitue l'acide sulfurique au sulfate, il n'y a point de précipité si le nitrate mercuriel est étendu d'eau, parce qu'alors il se forme du sulfate acide de mercure soluble; ce qui le prouve, c'est que si le nitrate de mercure est concentré, on obtient un précipité blanc de sulfate acide que l'eau fait disparaître tout-à-coup.

On conçoit encore qu'il serait possible de faire un sulfate acidule de mercure, en versant du sulfate de soude dans une dissolution de nitrate, contenant un assez grand excès d'acide; mais ce serait le résultat d'un tâtonnement toujours difficile dans l'exécution.

Ainsi les trois sulfates oxigénés, pour la préparation desquels nous venons de décrire plusieurs procédés, sont donc, le premier, jaune; c'est celui qu'on appelait autrefois *turbith minéral*. Il est insoluble dans l'eau; les acides sulfurique, nitrique, muriatique, le dissolvent en le transformant en sulfate acide, qui, dans les deux derniers cas, se trouvent mêlés de nitrate et de muriate très-oxidés.

Toutes les bases salifiables en séparent de l'oxide jaune, excepté l'ammoniaque, avec laquelle ce sel forme un sel triple blanc; c'est même ainsi que se comportent tous les sels de mercure très-oxidés.

Le sel marin avec le turbith donne du sulfate de soude et du sublimé corrosif mêlé d'un peu de mercure doux.

La seconde espèce de sulfate très-oxidé est celui que nous désignons sous le nom de *sulfate acidule de mercure oxigéné*. Puisque ce sel est blanc, et que l'eau le transforme en sulfate neutre jaune, insoluble, et en sulfate acide soluble, l'existence par là même en est démontrée.

Le sulfate acide de mercure oxigéné est la troisième espèce; il est blanc, soluble dans l'eau, déliquescent. Lorsqu'on en évapore la dissolution, comme presque toujours il se dégage de l'acide sulfurique, on obtient d'abord des paillettes d'un jaune rougeâtre de turbith, et ensuite une masse blanche aiguillée cristalline, qui, traitée par l'eau, donne

Digitized by Google

encore, mais en petite quantité, du turbith, et qui par conséquent contenait du sulfate acidule de mercure.

Il est facile de voir, d'après ce que nous avons dit du turbith, quelle doit être l'action des sulfates acidule et acide de mercure sur les différens corps ; et l'exposer ici serait en quelque sorte une répétition totalement inutile. Nous ajouterons seulement, 1.° qu'avec le sulfate acide de mercure oxigéné, on n'obtient absolument que du sublimé corrosif; que ce procédé même est l'un des meilleurs qu'on puisse employer pour faire une grande quantité de ce sel muriatique; 2.° que selon qu'on verse plus ou moins de potasse ou de soude, &c. dans le sulfate acide de mercure, on obtient pour précipité du sulfate neutre ou de l'oxide jaune, et qu'en y versant de l'ammoniaque, on ne trouble point la dissolution, parce qu'alors il se forme un sulfate d'ammoniaque et de mercure soluble par la grande quantité de sulfate d'ammoniaque qu'il contient.

Il était important d'analyser avec beaucoup de soin ces quatre espèces de sulfate de mercure : l'expérience nous a bientôt instruits qu'il est impossible de connaître exactement la nature des sulfates acides, parce qu'ils ne sont jamais dans un état constant ; il n'a donc été possible d'analyser que les deux sulfates neutres, l'un peu oxidé, l'autre fortement oxidé. Ce genre d'analyse nous a présenté quelques difficultés. Voici la méthode qui a été suivie après plusieurs essais comparés. On a déterminé la quantité d'acide sulfurique en faisant bouillir cent parties de sulfate de mercure sec avec une dissolution de nitrate de barite en excès, auquel on ajoutait de l'acide nitrique pour dissoudre l'oxide de mercure qui aurait pu se trouver mêlé avec le sulfate de barite. On a filtré et lavé ; on a fait sécher le sulfate de barite resté sur le filtre : recueilli soigneusement, il a été rougi dans un creuset d'argent, et pesé. Comme le sulfate de barite, dans cet état, contient le quart de son poids d'acide sulfurique, on voit que cette manière de procéder a dû donner la proportion exacte de cet acide.

Quant à celle de l'oxide de mercure et de l'oxigène uni à ce métal,

Digitized by Google

pour la déterminer, on a choisi l'opération suivante. On a mis deux cents parties de sulfate de mercure mêlé avec un excès de potasse dans des cornues de verre lutées, dont les extrémités étaient reçues sous des cloches pleines d'eau ; on a chauffé fortement ; la potasse s'est unie à l'acide sulfurique ; l'oxide de mercure devenu libre s'est décomposé ; l'oxigène s'est dégagé et rassemblé dans les cloches où on l'a mesuré, en défalquant le volume de l'air des cornues ; le mercure réduit a été obtenu à part et pesé.

Avec ces précautions, et en recommençant plusieurs fois de suite ces analyses, on a trouvé, 1.° que cent parties du sulfate de mercure neutre peu oxidé, contiennent,

Mercure.....	83,0.
Oxigène.....	4,5.
Acide sulfurique.....	10,0.
Eau et perte.....	2,5.
	100,0.

2.° Que cent parties du sulfate de mercure neutre très-oxidé contiennent,

Mercure.....	83,0.
Oxigène.....	7,0.
Acide sulfurique.....	7,5.
Eau et perte.....	2,5.
	100,0.

§. IV.

Des Nitrates et Nitrites de mercure.

L'ACTION de l'acide nitrique sur le mercure ressemble beaucoup à celle de l'acide sulfurique sur ce métal. Elle en diffère en ce point seulement que l'oxide noir de mercure se combine comme l'oxide rouge en trois proportions différentes avec l'acide nitrique. Il y a donc six nitrates de mercure, trois peu oxidés, dont l'un est neutre, le second

Digitized by Google

acidule et le troisième acide, et trois très-oxidés qui sont dans le même cas que les précédens, neutre, acidule et acide.

Pour obtenir les trois premiers, il faut faire agir à la température de l'atmosphère, de l'acide nitrique à 16 degrés sur un excès de mercure. Peu-à-peu la dissolution se fait et ne tarde point à cristalliser d'elle-même. Souvent lorsqu'elle est au point de saturation convenable, par l'agitation, elle se remplit tout-à-coup d'une multitude de petits cristaux aiguillés. Dans tous les cas, quelle que soit la forme des cristaux, c'est toujours un nitrate acidule (mêlé, comme on le verra plus bas, d'un peu de nitrite) qui se comporte avec l'eau comme le sulfate acidule de mercure, c'est-à-dire, qui se transforme en nitrate neutre peu oxidé, insoluble, d'une couleur grise, et en nitrate acide soluble dans l'eau et incolore.

Pour former les trois nitrates oxigénés, au lieu d'employer de l'acide nitrique à 16 degrés, et de le faire agir à froid sur le mercure, il faut se servir d'acide à 25 degrés, porter la liqueur jusqu'à l'ébullition, et continuer cette ébullition jusqu'à ce que le nitrate qui précipite d'abord fortement par l'acide muriatique, cesse de se troubler par ce réactif; alors on évapore presque à siccité la dissolution : on obtient ainsi un nitrate acidule jaunâtre très-oxidé, qui, par l'eau, donne du nitrate neutre insoluble et jaune, appelé autrefois *turbith nitreux*, et un nitrate acide très-soluble et sans couleur.

Ainsi on voit que, dans ces deux cas, le nitrate acidule, peu et très-oxidé, éprouve le même genre de décomposition, par l'eau, que le sulfate acidule, et qu'il en résulte des produits comparables.

Examinons maintenant les nitrates acides peu et très-oxidés de mercure. Ce que nous en dirons suffira pour faire concevoir toutes les propriétés des autres.

Le premier, le nitrate peu oxidé, cristallise facilement, et affecte beaucoup de formes différentes; il ne colore point les matières animales; il n'est point déliquescent : l'acide sulfurique, l'acide muriatique libre ou combiné en précipite tout l'oxide à l'état de sulfate et de muriate

Digitized by Google

blanc et peu oxidé. Toutes les bases salifiables solubles y forment un précipité gris-noirâtre, qui n'est autre chose que de l'oxide pur peu oxidé, excepté celui provenant de l'ammoniaque, dans lequel on trouve une petite quantité d'alcali et d'acide.

Le second, le nitrate très-oxidé, cristallise difficilement. Il se prend ordinairement, par l'évaporation, en une masse syrupeuse remplie de petites aiguilles qui se croisent. Il colore en noir les matières animales; il est déliquescent : toutes les bases salifiables, mises en excès, le précipitent en jaune, excepté l'ammoniaque, qui le précipite en blanc. Si le nitrate contenait un grand excès d'acide, l'ammoniaque n'y produirait aucun précipité; il se ferait un sel triple très-soluble, dans lequel il entre beaucoup de nitrate d'ammoniaque. Voilà pourquoi le sulfate acide de mercure très-oxidé ne précipite pas par l'ammoniaque. L'acide sulfurique et l'acide muriatique n'y font aucun précipité, à moins qu'il ne soit en dissolution concentrée; et alors, dans le premier cas, c'est un sulfate acide qui se dépose; dans le second, du sublimé corrosif, sous la forme de lames : mais ces deux dépôts se dissolvent de suite dans l'eau.

Les sulfates y déterminent un précipité d'un beau jaune, qui est un vrai turbith minéral. Les muriates agissent comme l'acide muriatique.

Les phosphates, fluates, borates, carbonates de soude, de potasse et d'ammoniaque, et tous les sels en général dont l'acide forme un sel insoluble avec l'oxide de mercure, versés dans les nitrates acides peu et très-oxidés de mercure, y produisent presque toujours des précipités blancs avec le premier de ces sels, souvent des précipités colorés avec le second.

Il existe une certaine dissolution nitrique dont *Bergmann* a beaucoup parlé sous le nom de *dissolution de mercure* en mauvais état, et qui a la propriété de se troubler par l'eau. Jusqu'ici on a ignoré dans quel état devait être le nitrate de mercure pour offrir ce phénomène; quelques expériences nous ont bientôt appris qu'on formait constamment ce sel en faisant bouillir un excès d'oxide rouge de mercure avec de l'acide

Digitized by Google

nitrique concentré; que l'expérience manque constamment avec l'acide étendu d'eau, à moins qu'on ne concentre par la chaleur, et que si on emploie de l'oxide peu oxidé, elle n'avait de succès que quand l'oxide était devenu rouge : par conséquent l'acide nitrique concentré dissout plus d'oxide oxidé que l'acide nitrique faible; et telle est la raison pour laquelle il faut que les dissolutions mercurielles soient formées comme nous venons de le dire, pour précipiter par l'eau. Le précipité qui, dans ce cas, a toujours lieu, est blanc-jaunâtre; c'est un véritable nitrate acidule de mercure, que l'eau rend beaucoup plus jaune, et, jusqu'à un certain point, rougeâtre, en lui enlevant beaucoup d'acide et un peu d'oxide, et en le transformant en une espèce de turbith nitreux.

Il est rare qu'en dissolvant immédiatement et à froid le mercure coulant dans l'acide nitrique, la dissolution ne contienne pas une portion de nitrite de mercure, sel dont les chimistes n'ont pas soupçonné jusqu'ici l'existence, et dont les propriétés sont cependant très-caractérisées, comme nous allons bientôt le faire voir. Lorsqu'on aide la dissolution par la chaleur, il se forme une plus grande quantité de nitrite. On voit, d'après cela, que, pour avoir des nitrates de mercure bien purs, il faut dissoudre l'oxide noir ou rouge dans de l'acide nitrique froid ou chaud, et que ce procédé est préférable à la dissolution immédiate.

Il existe deux nitrites de mercure, l'un peu oxidé, l'autre très-oxidé. Le premier est facilement préparé par la dissolution immédiate, et à froid, du mercure dans l'acide nitrique à 20 ou 25 degrés. On le reconnaît à ce que ses cristaux sont très-bien formés, donnent beaucoup de vapeurs rutilantes et nitreuses par le contact de l'acide sulfurique concentré. Ce nitrite se comporte avec les réactifs alcalins exactement de la même manière que le nitrate de mercure peu oxidé.

On peut préparer le nitrite de mercure très-oxidé par la dissolution immédiate, aidée par la chaleur; mais on réussit mieux en combinant directement l'oxide rouge de mercure avec l'acide nitreux. Ce nitrite cristallise très-difficilement; il attire légèrement l'humidité de l'air; il teint les matières animales, et sur-tout la peau, en pourpre foncé, tandis

Digitized by Google

tandis que le nitrate très-oxidé les teint en noir. Les nitrates et nitrites de mercure peu oxidés, ou contenant l'oxide noir de ce métal, ne produisent aucune couleur sur les substances animales. Le nitrite très-oxidé précipite par l'eau comme le nitrate de mercure, et seulement dans les mêmes circonstances que nous avons énoncées pour ce dernier. Il se comporte aussi, comme le nitrate très-oxidé, avec les alcalis et les sels précipitans.

On peut faire les nitrites de mercure en chargeant les dissolutions de nitrate de gaz nitreux, qu'elles absorbent plus ou moins facilement. La dissolution de nitrate de mercure très-oxidé, évaporée en consistance épaisse et presque syrupeuse, prend une très-grande quantité de ce gaz; celle de nitrate de mercure peu oxidé ou faite à froid, bien moins chargée de sel que la précédente, en raison de la moindre solubilité de ce nitrate, absorbe bien moins de gaz nitreux et passe moins facilement à l'état de nitrite. Le nitrate très-oxidé prend, par cette absorption, la propriété de colorer la peau en pourpre, et non en noir, comme il le faisait dans son premier état.

Ces faits nouveaux sur les nitrites de mercure nous engagent à joindre ici quelques considérations sur ce genre de sels encore très-peu étudié et très-peu connu. La plupart des nitrates salins et métalliques sont susceptibles d'absorber du gaz nitreux, comme le fait l'acide nitrique, et de passer par-là à l'état de nitrite. Cette propriété est sur-tout marquée dans les nitrates les plus solubles et dans leurs dissolutions très-concentrées. C'est ainsi que les nitrates de chaux, de magnésie, de strontiane, passent à l'état de nitrites en absorbant le gaz nitreux, et que le nitrate de potasse ne se dénature pas si aisément par le même procédé.

Les nitrites de chaux et de mercure exposés à l'air en absorbent l'oxigène assez rapidement pour passer en quelques heures à l'état de nitrates. Le nitrite de potasse résiste à cette conversion, puisqu'après huit jours de son exposition à l'air, il nous a paru avoir entièrement conservé sa nature de nitrite.

Voilà donc trois manières connues d'obtenir ou de préparer les nitrites

Digitized by Google

alcalins et terreux; savoir : 1.° l'action du feu sur les nitrates; 2.° l'union directe et immédiate des bases salifiables avec l'acide nitreux; 3.° l'absorption du gaz nitreux par la dissolution des nitrates. Quant aux nitrites métalliques, il existe une quatrième manière de les préparer; c'est, comme on l'a vu, la dissolution des métaux dans l'acide nitrique, faite de manière à ce que le gaz nitreux formé reste dans la dissolution et ne se dégage pas.

III.^e MÉMOIRE SUR LE MERCURE.

§. V.

Des Muriates, et spécialement d'une nouvelle variété de cette espèce.

DANS nos deux premiers Mémoires sur le mercure, nous avons traité de son oxidation et de ses combinaisons avec les acides sulfurique, nitrique et nitreux; nous avons démontré qu'il n'existait que deux oxides de mercure, l'un noir, contenant 0,04 d'oxigène, l'autre rouge, en contenant 0,08; que ces deux oxides pouvaient, en s'unissant avec les acides sulfurique et nitrique, former des sels neutres et des sels avec excès d'acide; qu'on devait distinguer quatre espèces de sulfates et six espèces de nitrates. Nous avons fait voir ensuite que ce qu'on avait pris jusqu'à présent pour des nitrates, n'était souvent que des nitrites, et que ceux-ci étaient probablement en aussi grand nombre que ceux-là. Enfin nous avons examiné avec le plus grand soin et dans le plus grand détail, les propriétés de ces différens composés mercuriels. Nous ne rappellerons point ici les observations nouvelles qui ont été la suite naturelle de ces recherches; il nous suffira de dire que les oxides comme les sels nous ont présenté beaucoup de faits particuliers, intéressant tous plus ou moins la science par la lumière qu'ils jettent sur plusieurs points de théorie encore obscurs.

Dans ce Mémoire, qui, comme les deux précédens, a pour objet le mercure, nous nous proposons de considérer l'action qu'exercent sur lui l'acide muriatique et sur-tout l'acide muriatique oxigéné.

Digitized by Google

On sait depuis long-temps qu'à une température quelconque, l'acide muriatique n'attaque point le mercure, et qu'à toutes, au contraire, il s'unit facilement avec les oxides, et forme avec le premier du mercure doux, et avec le second du sublimé corrosif. Quoique ce résultat nous indique suffisamment la nature ou la composition de ces sels, beaucoup de chimistes cependant, tout en admettant que le mercure doux est une combinaison d'acide muriatique et de mercure faiblement oxidé, regardent le sublimé corrosif comme du muriate sur-oxigéné de mercure; mais cette erreur, qui s'est accréditée avec le temps, et qui a passé dans les livres élémentaires, quelques réflexions suffisent pour la détruire. En effet, tous les acides peuvent se combiner non-seulement avec l'oxide noir, mais encore avec l'oxide rouge. Il serait bien étonnant que l'acide muriatique fût le seul qui ne jouît pas de cette propriété. D'ailleurs, si le sublimé corrosif était véritablement un muriate sur-oxigéné de mercure, décomposé par l'acide sulfurique, il se dégagerait beaucoup d'acide muriatique oxigéné; et décomposé par la potasse, il se formerait un muriate sur-oxigéné alcalin. Or on n'obtient, dans le premier cas, que de l'acide muriatique, et dans le second, que du muriate de potasse. Concluons donc que le sublimé corrosif est au mercure doux ce que le sulfate et le nitrate de mercure très-oxidé sont aux sulfate et nitrate de mercure peu oxidé. On pourrait néanmoins faire une objection contre ce raisonnement; on pourrait dire que le sublimé corrosif contient le mercure oxidé en noir seulement, et qu'en le traitant par l'acide sulfurique et la potasse, cet oxide devenant noir, il ne peut en résulter ni muriate sur-oxigéné de potasse, ni dégagement d'acide muriatique oxigéné. Mais cette objection n'est que spécieuse, et disparaît devant l'expérience, qui démontre l'existence d'un muriate sur-oxigéné de mercure, bien différent du sublimé corrosif. C'est de ce muriate sur-oxigéné de mercure (*) que nous allons maintenant entretenir la classe, en

(*) M. *Chenevix* a déjà parlé de ce sel dans le *Journal de physique*, messidor an 10, *pag. 113, tom. 55.* Quoique notre travail sur le mercure fût terminé bien avant cette époque, comme il n'était pas public quand celui de M. *Chenevix* a paru, nous ne réclamons point

Digitized by Google

examinant comment se comporte le mercure et les deux oxides avec l'acide muriatique oxigéné.

L'action de l'acide muriatique oxigéné sur le mercure et sur son oxide noir a été décrite avec soin par plusieurs chimistes. Le mercure se change en mercure doux, et bientôt en sublimé corrosif. Celle de l'acide muriatique oxigéné sur l'oxide rouge, beaucoup plus compliquée et plus difficile à apprécier, n'a point, à beaucoup près, été si bien observée. Nous l'avons suivie dans tous ses points, et ce sont les résultats nouveaux qu'elle nous a offerts, qui, comme nous l'avons annoncé, sont principalement l'objet de ce Mémoire, et par conséquent ceux sur lesquels nous insisterons.

L'acide muriatique oxigéné, agité avec l'oxide rouge de mercure, est sur-le-champ absorbé; son odeur disparaît tout-à-coup, l'oxide change de couleur; il devient en quelques heures brun-marron, et, dans l'espace de quelques jours, puce et presque noir, en renouvelant l'acide. Alors insipide, sans action, comme auparavant, sur la teinture de tournesol, il donne à la distillation du sublimé corrosif, et pour résidu de l'oxide rouge de mercure. Il se dissout entièrement dans les acides sulfurique, nitrique et muriatique. On peut donc le regarder ou comme un mélange de mercure doux et d'oxide sur-oxigéné, ou comme du muriate de mercure oxigéné avec excès d'oxide. Dans ces deux hypothèses, on explique également bien tous les phénomènes; mais la première qu'admet la théorie n'est point d'accord avec l'expérience, et on verra bientôt que cet oxide ne devient noir que parce qu'il ne se combine point avec assez d'acide muriatique pour former

---

la priorité. Nous ferons seulement observer que M. *Chenevix* a moins étudié que nous ce sel ainsi que les circonstances de sa formation. Ce chimiste regarde comme très-probable, que le résidu brun qu'on obtient en traitant l'oxide rouge de mercure par l'acide muriatique oxigéné, est un oxide particulier; nous, nous démontrons que c'est un muriate de mercure très-oxidé avec excès d'oxide; de plus, il paraît que M. *Chenevix* n'a point obtenu pur le muriate sur-oxigéné de mercure, car il ne dit rien de la déliquescence qu'il éprouve à l'air, du pétillement qu'il produit lorsqu'on le mêle avec l'acide sulfurique; probablement que celui sur lequel il a fait ses essais était encore mêlé de beaucoup de sublimé corrosif.

Digitized by Google

du sublimé corrosif (*). La liqueur qui le surnage donne, par une première évaporation, de belles aiguilles cristallines, qu'on reconnaît aisément pour être du sublimé corrosif; une seconde et même une troisième évaporation donne encore des cristaux dont les formes sont assez régulières : mais à cette époque, l'eau mère refuse ordinairement de cristalliser; elle se prend en masse syrupeuse qui attire fortement l'humidité de l'air, et dégage beaucoup d'acide muriatique oxigéné par l'acide sulfurique. Elle n'est donc presque formée que de muriate sur-oxigéné de mercure, qui, outre les caractères que je viens de citer, en présente plusieurs autres non moins remarquables.

La saveur de ce nouveau sel est plus forte, plus âcre, et son action sur l'économie animale sans doute plus grande que celles du sublimé corrosif. Sa dissolution, élevée à la température de 40 à 50 degrés, répand une odeur si nauséabonde, qu'on ne peut la supporter. Chauffée plus fortement, elle se dessèche et bientôt éprouve une décomposition d'où résulte du mercure doux et du gaz oxigène. Il paraît donc que le muriate sur-oxigéné de mercure ne contient point assez d'acide muriatique pour saturer tout son oxide : cet oxide se réduit en partie, et de là la formation du muriate de mercure peu oxidé. Cette explication est d'autant plus naturelle et plus certaine, qu'on produit les mêmes phénomènes en exposant de suite à une forte chaleur un mélange intime de sublimé corrosif et d'oxide rouge de mercure. A la vérité, en ménageant le feu, on parvient à séparer le sublimé, qui se volatilise d'abord, de l'oxide rouge qui reste au fond de la cornue; mais je ne doute pas qu'en distillant doucement le muriate sur-oxigéné de mercure, on n'obtienne des résultats semblables.

(*) MM. *Braamcamp* et *Siqueira Oliva*, Portugais, ont publié dans le n.° des *Annales de chimie*, du 30 floréal an 13, quelque chose sur le mercure. En parlant de nos expériences sur le muriate sur-oxigéné de mercure, ils nous font dire que le résidu brun qui se forme en agitant de l'acide muriatique oxigéné avec l'oxide rouge de mercure, est un oxide sur-oxigéné; ils se trompent. Nous avons dit que théoriquement cela pourrait être ainsi; mais nous avons bientôt démontré, et bien avant qu'ils ne songeassent à étudier le mercure, que ce résidu brun était du muriate de mercure très-oxidé avec excès d'oxide.

Digitized by Google

Le muriate sur-oxigéné de mercure ayant une si faible attraction pour l'oxigène, qu'il se décompose même spontanément, sur-tout quand on l'expose à la lumière, nous devions présumer qu'il agirait fortement sur les corps combustibles, et particulièrement sur le phosphore et le soufre. En effet, il détone par le choc avec le premier; et lorsqu'il est encore liquide, mêlé avec le second, en employant une partie de celui-ci contre trois de celui-là, au bout d'une minute le mélange s'agite bientôt; il se fait un boursouflement considérable; le soufre se brûle; il se dégage beaucoup d'acide muriatique oxigéné, et il se forme du sulfate de mercure oxigéné.

Les acides sulfurique, nitrique et muriatique décomposent tout-à-coup le muriate sur-oxigéné de mercure. Cette décomposition se fait par l'acide sulfurique, souvent avec décrépitation lorsque le sel est solide, et toujours sans bruit lorsqu'il est liquide. Nous ne savons point si la plupart des autres acides ont aussi la propriété d'opérer la décomposition de ce sel; mais nous avons tant de raisons pour le croire, que nous oserions presque l'assurer.

Les bases salifiables agissent sur le muriate sur-oxigéné de mercure comme sur le sublimé corrosif; il existe une telle relation dans leur action sur les sels de mercure, qu'on peut établir comme règle générale, qu'excepté l'ammoniaque qui les précipite en blanc, elles précipitent en jaune tous ceux qui sont très-oxidés, tandis qu'elles précipitent ceux qui le sont peu en gris sensiblement noir. Le précipité noir ou blanc formé par l'ammoniaque dans le sel plus ou moins oxigéné, est toujours un sel triple peu soluble; le précipité noir ou jaune formé par les autres alcalis, est toujours de l'oxide pur. Nous avions cru d'abord que celui-ci, remarquable par sa belle couleur jaune, parce qu'il se dissolvait dans une grande quantité d'eau, et que l'ammoniaque le précipitait alors de cette dissolution, était aussi un sel triple; mais comme il ne donne par la distillation que du mercure et de l'oxigène sans résidu, comme celui qui provient du sublimé corrosif dissous dans l'acide nitrique, ne précipite pas par le nitrate d'argent, et que celui extrait du sulfate acide dissout

Digitized by Google

également dans l'acide nitrique, ne se trouble pas par le nitrate de barite, nous ne doutâmes plus dès-lors de sa composition, et nous fûmes certains que c'était une combinaison de mercure et d'oxigène seulement. Ainsi il faut conclure que si les sels de mercure oxigénés très-étendus d'eau ne précipitent pas par les bases salifiables, c'est que l'eau retient en dissolution l'oxide que ces bases séparent. Cependant il est possible que le sel auquel elles donnent naissance favorise la dissolution de l'oxide, et je le crois d'autant plus, que les précipités qu'on forme dans le sublimé corrosif sont plus solubles que ceux qu'on forme dans les nitrate et sulfate oxigénés. Aussi, tandis qu'il faut ajouter une très-grande quantité d'eau à la dissolution du nitrate de mercure pour l'empêcher de précipiter par l'eau de chaux, pour produire le même phénomène avec le sublimé corrosif, il suffit d'étendre la dissolution d'une fois son poids d'eau.

Mais si au lieu de verser dans la dissolution mercurielle un excès de base salifiable, comme je l'ai supposé plus haut, on n'en ajoute pas assez pour en opérer la décomposition complète, alors les précipités varient et dans leur couleur et dans leur nature; ils retiennent toujours plus ou moins d'acide, et il en résulte tantôt des sels neutres, quelquefois des sels avec excès d'oxide. Déjà il a été question de ceux que peuvent former les nitrates et les sulfates, nous ne parlerons que de ceux que peuvent former les muriates.

Il est difficile de savoir si le mercure doux peut se combiner avec un excès d'oxide; si ce nouveau sel existe, il n'offre aucune propriété apparente qui puisse le faire distinguer de celui-ci. Il n'en est pas de même du sublimé corrosif. Lorsqu'on verse dans la dissolution du sublimé corrosif et du muriate sur-oxigéné de mercure, une petite quantité de potasse ou d'une autre base salifiable alcaline, on obtient un précipité brun composé de beaucoup d'oxide et de peu d'acide muriatique. Ce précipité brun distillé à une forte chaleur, donne du mercure doux, du mercure et du gaz oxigène; à une chaleur moins forte, il donne seulement du sublimé corrosif et beaucoup d'oxide rouge

Digitized by Google

de mercure : il est entièrement semblable au résidu de l'oxide rouge de mercure traité par l'acide muriatique oxigéné; c'est là ce qui nous a fait dire précédemment que ce résidu n'était point un nouvel oxide, mais une combinaison de sublimé corrosif et d'oxide rouge de mercure; et ce qui le prouve d'une manière incontestable, c'est qu'on peut former ce sel avec excès d'oxide en broyant du sublimé avec de l'oxide rouge de mercure et de l'eau; bientôt la couleur du mélange s'altère, elle se fonce, le sublimé se précipite et se combine avec l'oxide. Puisqu'il est maintenant démontré que la matière noire qui se forme lorsqu'on traite l'oxide rouge de mercure par l'acide muriatique oxigéné, est un muriate de mercure très-oxidé avec excès d'oxide, et que la liqueur ne contient que du sublimé corrosif et du muriate sur-oxigéné de mercure, la théorie de cette expérience est simple et facile à concevoir. On voit que l'acide muriatique oxigéné se partage en deux parties; que l'une cède de l'oxigène à l'autre; que celui-ci devenu sur-oxigéné se combine avec une partie de l'oxide rouge de mercure et forme du muriate sur-oxigéné; que l'autre partie de l'acide désoxigéné s'unit, 1.° avec de l'oxide rouge de mercure, et forme du sublimé corrosif; 2.° avec une autre portion plus abondante de cet oxide, et constitue un sel brun qui n'est autre chose que du sublimé corrosif avec excès d'oxide ou muriate de mercure oxigéné avec excès d'oxide, sel qu'on prépare encore en broyant une dissolution de sublimé corrosif avec de l'oxide rouge, comme on vient de le dire.

Il entrait aussi dans le plan de nos recherches d'observer l'action des dissolutions salines, et sur-tout de l'hydrogène sulfuré, et des hydrosulfures sur les muriates de mercure. Plusieurs des observations que nous avons faites sont nouvelles; et quoique quelques autres soient déjà connues, comme elles n'ont point été décrites avec exactitude, nous pensons qu'il est utile de rapporter les unes et les autres.

Les sulfates, nitrates et muriates ne précipitent ni le sublimé ni le muriate sur-oxigéné de mercure.

Le phosphate et le carbonate de soude, le carbonate et l'arseniate de

Digitized by Google

de potasse, le carbonate d'ammoniaque, forment des précipités blancs dans le muriate sur-oxigéné de mercure; l'arsénite de potasse forme aussi un précipité blanc dans cette dissolution saline, mais qui devient jaune dans les vingt-quatre heures.

Le phosphate de soude trouble à peine le sublimé corrosif;

Le borax le précipite en jaune rougeâtre, qui se fonce de plus en plus en couleur par l'addition du borax, sans doute parce que le borax enlève une partie de l'acide au précipité.

Le carbonate de potasse le précipite en jaune rougeâtre;

Le carbonate d'ammoniaque et l'arsénite de potasse, en blanc;

L'arséniate de potasse, en jaune-serin.

L'hydrogène sulfuré et les hydro-sulfures forment dans tous les sels de mercure peu oxidé, un précipité noir, et dans tous les sels de mercure très-oxidé, un précipité rouge, qui, par l'agitation, ne tarde point à devenir blanc, et ne change plus de couleur, à moins qu'on n'ajoute de l'hydrogène sulfuré, ou de l'hydro-sulfure, qui le rend promptement noir. L'analyse prouve que le précipité de couleur noire est de l'éthiops ou du sulfure de mercure, et que le précipité blanc est une combinaison d'oxide de mercure peu oxidé, de soufre, et d'acide. C'est ce qui sera mis hors de doute dans le mémoire suivant, où nous traiterons des combinaisons du soufre avec le mercure. Nous terminerons celui-ci par l'analyse des muriates dont nous venons de faire voir, sinon toutes les propriétés, au moins les principales, ou celles qu'il était important de connaître.

Analyse des Muriates de mercure.

Expérience I.re

On a pris cent parties de mercure doux sublimé, qu'on a fait bouillir une demi-heure avec une suffisante quantité de nitrate acide d'argent. On a filtré; le muriate d'argent resté sur le filtre, bien séché, pesait cinquante-huit parties. Or, comme cent parties de muriate d'argent en contiennent vingt d'acide muriatique, cinquante-huit en contiennent 11,6.

Digitized by Google

Expérience II.e

Cent parties de mercure doux distillé avec de la potasse légèrement humectée d'eau pour empêcher la sublimation du sel, ont donné 4,5 parties d'oxigène, et quatre-vingt-trois parties de mercure.

Donc cent parties de mercure doux sont composées; savoir:

Acide muriatique	11,6.
Oxigène	4,5.
Mercure	83,0.
Perte et eau	0,9.
Total	100.

En analysant le sublimé corrosif et le muriate de mercure oxigéné avec excès d'oxide, par des moyens analogues, nous avons trouvé que cent parties du premier contenaient,

Acide muriatique	20.
Mercure	73.
Oxigène	6.
Eau et perte	1.
Total	100(*);

et que cent parties du second étaient formées d'environ dix d'acide muriatique, et de quatre-vingt-dix d'oxide rouge de mercure.

Nous n'avons point essayé de déterminer la proportion des principes constituans du muriate sur-oxigéné de mercure; cette analyse n'eût été que très-imparfaite, à cause de l'impossibilité de séparer exactement le

(*) M. *Chenevix* a aussi analysé le mercure doux et le sublimé corrosif. Nos résultats sont sensiblement les mêmes pour les quantités d'oxide et d'acide qui entrent dans la composition de ces sels. Nous différons en ce point, qu'il admet beaucoup plus d'oxigène que nous dans l'oxide noir et l'oxide rouge de mercure. Selon ce chimiste, l'oxide noir, sur cent parties, contient 10,7 d'oxigène, et l'oxide rouge en contient 15. D'après nos expériences, l'oxide noir de mercure ne contient que quatre centièmes d'oxigène, et l'oxide rouge huit.

Digitized by Google

sublimé corrosif du muriate sur-oxigéné, et même les résultats en eussent été si douteux, que nous ne nous fussions point permis de les publier.

IV.^e et dernier MÉMOIRE SUR LE MERCURE.

§. VI.

Des Sulfures de mercure, ou de l'Éthiops et du Cinabre.

L'ÉTHIOPS et le cinabre sont deux composés qu'on obtient en combinant le mercure avec le soufre. On n'observe d'autre différence dans l'art de les fabriquer, qu'une élévation de température plus ou moins grande.

La formation du cinabre exige un coup de feu assez fort pour que la matière se sublime; celle de l'éthiops n'a lieu que quand le degré de chaleur suffit à peine pour fondre le soufre; elle s'opère même à froid par une trituration long-temps continuée. On fait encore de l'éthiops et du cinabre par la voie humide, soit en précipitant des dissolutions de mercure par l'hydrogène sulfuré, les sulfures hydrogénés, les hydro-sulfures, soit en agitant du mercure avec les sulfures hydrogénés.

Quelque procédé qu'on suive pour les obtenir, ils présentent toujours sensiblement la même couleur; l'éthiops est constamment plus ou moins noir, et le cinabre toujours rouge : de là, et sachant d'ailleurs que le mercure pouvait s'oxider en noir et en rouge, la plupart des chimistes ont pensé qu'ils n'étaient tous deux qu'une combinaison, le premier, d'oxide noir, et le second, d'oxide rouge de mercure avec le soufre. Quelques-uns cependant, tout en n'admettant point l'existence de l'oxigène dans le cinabre, et le regardant comme un composé seulement de soufre et de mercure, supposent de l'hydrogène sulfuré dans l'éthiops, et le croient par conséquent formé d'hydrogène sulfuré, de soufre et de mercure. Dans l'une et l'autre de ces hypothèses, il est impossible d'expliquer tous les phénomènes que nous offrent l'éthiops et le cinabre, ou l'explication qu'on en donne est tellement forcée, qu'on ne saurait l'admettre. En effet, si l'éthiops et le cinabre contenaient de l'oxigène, devraient-ils se former lorsqu'on agite du mercure avec un sulfure hydrogéné? Se produirait-il

Digitized by Google

une violente détonation en chauffant un mélange de soufre et d'oxide rouge de mercure ? Si l'éthiops était composé de soufre, de mercure et d'hydrogène sulfuré, et le cinabre de soufre et de mercure, pourrait-on expliquer plus facilement l'extinction du mercure dans les hydro-sulfures sulfurés, son changement en poudre noire ou éthiops, et bientôt son passage à l'état de sulfure rouge de mercure ? Il faudrait donc que le mercure s'emparât d'abord du soufre et de l'hydrogène sulfuré du sulfure hydrogéné alcalin, et qu'ensuite il abandonnât peu à peu l'hydrogène sulfuré à la base; mais ce serait faire parcourir un cercle vicieux à l'hydrogène sulfuré. Ce sont ces réflexions qui nous ont engagés à entreprendre une suite de recherches sur l'éthiops et le cinabre, bien convaincus qu'elles ne seraient point infructueuses. Depuis plus de trois ans elles sont entièrement terminées. Les résultats que nous allons communiquer à la classe doivent donc être reportés à cette époque.

Pour atteindre le but que nous nous proposions, il n'y avait qu'une marche à tenir; c'était de déterminer plus exactement qu'on ne l'avait fait encore, la nature et la proportion des principes constituans de l'éthiops et du cinabre. Voici la série des expériences qui nous ont fait connaître l'une et l'autre.

Cent parties de cinabre distillé avec de la potasse pure et bien sèche, dans une petite cornue de verre dont le col s'engageait sous une cloche pleine d'eau, ont donné quatre-vingt-six parties de mercure. Il n'est passé dans le récipient que de l'air atmosphérique : le résidu avait une saveur de sulfure : dissous dans l'eau et mêlé avec un excès d'acide nitrique, il se précipita du soufre et il se dégagea de l'hydrogène sulfuré; le nitrate de baryte forma dans la liqueur filtrée un nouveau dépôt, qui, bien séché, pesait quatre parties, et n'était que du sulfate de baryte. Dans ces quatre parties de sulfate de baryte, il n'y a pas un demi-grain d'oxigène : cet oxigène vient évidemment de l'eau décomposée par le sulfure; ainsi le cinabre ne doit point sa couleur à l'oxide rouge de mercure : le mercure y est à l'état métallique.

Voilà pourquoi le cinabre, calciné avec du charbon bien sec, se

Digitized by Google

sublime sans éprouver d'altération et sans donner d'acide carbonique;

Que de la décomposition du cinabre par le fer, il ne résulte que du sulfure de fer, dégageant beaucoup de gaz hydrogène sulfuré par les acides sulfurique et muriatique;

Enfin que l'acide muriatique n'attaque nullement le cinabre, tandis que l'acide nitro-muriatique le dissout, en isole d'abord le soufre qu'il ne tarde point à brûler, et forme, en se combinant avec le mercure qu'il oxide fortement, du sublimé corrosif; c'est même ce moyen que nous avons employé, comme préférable à tout autre, pour déterminer la quantité de soufre contenue dans le cinabre. De cent parties de cinabre ainsi traité, nous avons obtenu, en versant du nitrate de baryte dans la liqueur, soixante-dix-sept parties de sulfate de baryte, qui correspondent à 11,21 de soufre, puisque cent de sulfate de baryte contiennent vingt-six d'acide sulfurique, et que cent de celui-ci sont composées de cinquante-six de soufre et de quarante-quatre d'oxigène : d'une autre part, nous avons retiré de cent parties de cinabre, 0,86 de mercure; ces deux sommes réunies font 97,21. Les 2,79 parties de perte sont dues à l'impossibilité d'arriver à des résultats rigoureux, sur-tout lorsqu'il faut faire plusieurs opérations pour déterminer la quantité d'un corps contenu dans un autre. On peut donc établir, en attribuant cette perte plutôt au soufre qu'au mercure, ce qui est probable d'après ce que nous venons de dire, que le mercure est au soufre, dans le cinabre, comme 87:13.

Ce rapport nous semble d'autant plus exact, que la synthèse dont on se sert toujours avec succès pour corriger les erreurs de l'analyse, le donne également.

Il était naturel de soumettre l'éthiops aux mêmes épreuves que le cinabre, de le traiter par la potasse, le fer, le charbon, l'acide muriatique et l'acide nitro-muriatique; c'est ce que nous avons fait, en observant scrupuleusement tous les changemens qui pourraient se manifester. Dans toutes ces opérations, l'éthiops s'est absolument comporté comme le cinabre; comme lui, par conséquent, il est composé de soufre et de mercure : la seule différence qui existe entre l'un et l'autre, et qui les

Digitized by Google

caractérise, réside dans la proportion de leurs principes constituans, et dans la force qui réunit leurs molécules. Le cinabre est constamment formé de quatre-vingt-sept parties de mercure et de treize de soufre; l'éthiops, au contraire, varie singulièrement dans sa composition, et peut contenir plus ou moins de soufre que le cinabre. En broyant, même sans le secours de la chaleur, du soufre avec du cinabre, on fait de l'éthiops, qui, par la calcination, se change en soufre et en cinabre; en fondant du soufre avec du cinabre, on fait encore de l'éthiops, mais qui, par une calcination plus forte, se transforme en soufre et en cinabre. Les molécules du cinabre adhèrent donc bien plus les unes aux autres que celles de l'éthiops; de là, et de ce qui précède, découle l'explication de plusieurs faits autrefois inexplicables.

La formation de l'éthiops par la voie humide, et sa transformation en cinabre, sont maintenant aussi bien connues dans leurs causes que les phénomènes qui servent de base à la science. Quand on agite du mercure avec un sulfure hydrogéné, si le mercure s'éteint et s'il se forme une masse noire qui devient rouge au bout de quelque temps, c'est que d'abord il en résulte un composé contenant moins de soufre que le mercure n'en exige pour passer à l'état de cinabre; aussi en le distillant en retire-t-on du mercure et du cinabre : mais bientôt, pourvu cependant qu'il y ait assez de sulfure hydrogéné, absorbant une nouvelle quantité de soufre, cette masse noire ou ce sulfure noir de mercure avec excès de mercure, se change en sulfure rouge, qui, à une haute température, se sublime sans se décomposer. Ainsi, transformée en cinabre, elle n'est plus susceptible d'éprouver de changement, ou de se combiner avec le nouveau soufre pour devenir sulfure noir avec excès de soufre.

La théorie de la formation du cinabre et de l'éthiops par les sels de mercure, l'hydrogène sulfuré, les sulfures hydrogénés et les hydrosulfures est aussi simple et aussi facile à concevoir.

Le précipité noir qu'on obtient en versant de l'hydrogène sulfuré dans une dissolution de mercure, est toujours du sulfure noir de mercure avec excès de mercure; puisque, distillé, il donne du mercure et du cinabre:

Digitized by Google

celui que donnerait un hydro-sulfure pur serait sans doute composé des mêmes principes et dans les mêmes proportions ; mais comme les hydro-sulfures sont toujours plus ou moins sulfurés, toujours aussi le précipité qu'ils forment dans les dissolutions de mercure, est un éthiops avec excès de soufre, excès que l'hydro-sulfure peut dissoudre, de manière à faire passer l'éthiops à l'état de cinabre. On conçoit, d'après cela, et l'expérience le prouve, qu'avec un sulfure hydrogéné saturé de soufre, et un sel quelconque de mercure, on n'obtiendra jamais qu'un sulfure noir de mercure avec excès de soufre.

Dans ces différentes décompositions des sels mercuriels, nous avons eu occasion d'observer un phénomène qui, jusqu'à présent, a échappé à l'attention des chimistes, quoique très-frappant. Nous avons remarqué que toutes les dissolutions de mercure peu oxidé étaient précipitées en flocons noirs par l'hydrogène sulfuré pur ou uni aux bases salifiables, et que toutes celles très-oxidées l'étaient d'abord en flocons rouges devenant promptement blancs, et alors ne changeant plus de couleur, à moins qu'on n'ajoutât de nouveau de l'hydrogène sulfuré ou de l'hydro-sulfure, ce qui les rendait noirs sur-le-champ. Le précipité noir est, comme nous l'avons déjà dit, du sulfure de mercure contenant plus ou moins de soufre que le cinabre, selon le procédé employé pour le faire. Il ne nous a point été possible de déterminer la nature de celui qui est rouge, parce qu'à peine est-il formé qu'il passe tout de suite au blanc. Quant au précipité blanc, c'est un composé de soufre, d'oxide noir de mercure et d'acide. Voici les principales propriétés dont ce précipité jouit. Lorsqu'on le traite à chaud, sur-tout par une dissolution de potasse caustique, on en sépare seulement une grande portion de l'acide qui entre dans la composition, et il devient noir tout-à-coup ; cela est si vrai, qu'en rendant à cette matière noire l'acide qu'on en a enlevé, elle redevient blanche. Lorsqu'on décompose ce précipité blanc par l'hydrogène sulfuré, on forme de l'éthiops avec excès de mercure, et l'acide reste libre dans la liqueur ; le précipité blanc provenant du nitrate de mercure, donne, étant soumis à la distillation, du gaz

Digitized by Google

nitreux, du gaz acide sulfureux et du cinabre; celui formé dans le sublimé corrosif, également distillé, se change en acide sulfureux, mercure, mercure doux et cinabre. Nous n'avons point examiné ceux des autres sels de mercure; mais ils donnent sans doute des produits analogues.

Ces différens précipités blancs ne sont pas seulement de simples mélanges des corps qui les constituent; ce sont de véritables combinaisons; car l'oxide rouge de mercure demandant pour se dissoudre plus d'acide nitrique que l'oxide noir, on ne verrait pas pourquoi l'hydrogène sulfuré ajouté à une dissolution de nitrate de mercure très-oxidé, y produirait un précipité composé d'acide, de soufre et d'oxide noir de mercure. A la vérité, pour prouver que les précipités formés par l'hydrogène sulfuré, dans les autres sels mercuriels, sont également des combinaisons triples, on ne peut invoquer que l'analogie, puisque l'oxide noir de mercure forme avec tous les acides autres que l'acide nitrique, des sels insolubles; mais ici l'analogie suffit en quelque sorte pour conclure; et on ne peut s'empêcher de convenir au moins qu'il ne soit très-probable que la combinaison ayant lieu dans un cas, elle n'ait lieu dans les autres.

Telles sont les différentes observations que nous ont présentées les combinaisons du soufre avec le mercure; elles éclairent l'art de fabriquer le cinabre; elles font voir sur-tout qu'en suivant les procédés décrits dans la plupart des livres élémentaires, on emploie beaucoup trop de soufre, ce qui fait faire un plus grand nombre de sublimations pour brûler celui qui est en excès; enfin elles jettent le plus grand jour sur les phénomènes si variés que nous offrent l'hydrogène sulfuré, les sulfures-hydrogénés, les hydro-sulfures mis en contact, soit avec le mercure, soit avec les dissolutions mercurielles.

PROGRAMME

Digitized by Google

PROGRAMME DU COURS DES MINES,

Fait à l'École Polytechnique (l'année scolaire 1806),

Par M. HASSENFRATZ, Ingénieur en chef des Mines, et Professeur de Physique à l'École polytechnique.

I.re LEÇON.

But de ce Cours, sa durée, sa division. — Géogénésie, ou formation de la Terre. — Opinions des anciens et des modernes; objections à ces opinions. Théorie de M. Laplace.

LA science des minéraux se divise en trois parties, MINÉRALOGIE, exploitation des mines, et MINÉRALURGIE.

La première division, qui a pour objet les caractères distinctifs des minéraux, et la troisième, qui comprend les travaux chimiques qu'on leur applique, font partie du cours de chimie. L'exploitation des mines est la seule dont il sera question dans cette suite de leçons.

Ce cours, ne comprenant que dix leçons, doit être fait de manière à servir d'introduction à l'étude de la science des minéraux que doivent apprendre les élèves des mines, et à faire connaître aux élèves qui se destinent aux autres services, des procédés qui ne sont employés que dans l'art des mines, et qui peuvent être transportés avec avantage dans les autres services.

Les dix leçons sur l'exploitation des mines seront divisées en deux parties, *géologie*, extraction et préparation des minéraux.

De la Géologie.

LA géologie comprend la génération du globe, le gisement des minéraux, et les méthodes de recherche.

La génération du globe se divise en deux époques, formation primitive et mouvemens éprouvés depuis.

Digitized by Google

Toutes les opinions des philosophes anciens et modernes sur la formation du globe, peuvent se rapporter à trois, *théogéens, hydrogéens, pyrogéens.* Les premiers rapportent tout à la Divinité; les seconds, à l'eau ; les troisièmes, au feu.

Parmi les hypothèses théogéennes, la seule que l'on examinera est celle de Moïse.

Les hypothèses hydrogéennes et pyrogéennes ont pris naissance, les premières en Égypte, les secondes en Asie, et cela par le besoin et la crainte que chacun avait de ces substances génératrices. *Orphée, Hésiode, Homère, Thalès,* sont, parmi les anciens, les propagateurs de l'opinion égyptienne; *Bourguet, Burnet, Maillet, Linnée, Dolomieu,* &c., sont, parmi les modernes, les défenseurs de la formation par l'eau.

Exposé de ces hypothèses et des modifications que chacun y a apportées.

Zoroastre, les *brames,* les *sages de l'Orient,* les *mages,* les *stoïciens,* les *philosophes du Portique,* sont, parmi les anciens, les propagateurs de l'opinion indienne ; *Descartes, Leibnitz, Whiston, Buffon,* &c., sont, parmi les modernes, les défenseurs de la formation de la terre par le feu.

Exposé de ces hypothèses et des modifications que chacun y a apportées.

Objections faites aux hydrogéens qui isolent la terre et ne s'occupent, dans sa génération, ni de son mouvement ni de son rapport avec les autres corps du système planétaire.

Objections faites aux pyrogéens, qui établissent une analogie entre la génération de la terre et celle des autres planètes, et qui s'occupent de son mouvement et des causes qui le produisent.

Les objections faites à ces deux hypothèses empêchent de les admettre.

Hypothèse atmogéenne de M. *Laplace;* elle est conforme au mouvement des corps ; elle est fondée sur des exemples pris dans la variation

Digitized by Google

d'intensité de lumière des étoiles, sur l'existence de l'anneau de Saturne, &c.

Explication de la formation des masses solides qui constituent le globe terrestre. Accord entre cette formation et l'observation des dépôts accumulés dans les terrains primitifs. Explication, dans cette hypothèse, de la formation de plusieurs substances que *Saussure*, *Werner*, et les plus célèbres géologues, avaient regardées comme inexplicables.

II.e Leçon.

De l'augmentation ou de la diminution de la chaleur centrale. — Objections à l'hypothèse atmogéenne. — Examen des révolutions arrivées au globe terrestre depuis sa formation. — Hypothèses sur ces révolutions. — Objections à ces hypothèses. — Explications déduites de l'observation, qui s'accordent avec l'hypothèse atmogéenne.

Les expériences thermométriques faites dans l'intérieur de la terre, l'observation des ossemens d'animaux équatoriaux trouvés aux environs des pôles, celle des morenos abandonnés par les glaciers, laissent indécise la question de l'augmentation ou de la diminution de la chaleur centrale. — Explication de ces différens phénomènes par la variation de l'atmosphère solaire.

Les sulfures et les carbonates de chaux se décomposant par le feu ; devraient être de formation aqueuse. — Réponse à cette objection par des exemples de cubes de galène et de rhomboïdes de carbonate de chaux, &c. formés par le feu. — Réponse à plusieurs autres objections faites à l'hypothèse atmogéenne.

Division des terrains observés sur la surface du globe, en quatre espèces ; terrains *primitifs*, terrains *volcaniques*, terrains *secondaires*, terrains *tertiaires*.

Énumération des roches et des pierres que l'on trouve dans ces quatre espèces de terrains. — Quelques détails sur leur formation atmogéenne. Examen particulier des gypses enhydres et de quelques mines de sel interposées entre des couches de schistes micacés primitifs.

Digitized by Google

Comparaison entre la manière d'être actuelle des couches des terrains primitifs et celle qu'elles devaient avoir lors de leur formation, dans les hypothèses hydrogéenne et pyrogéenne; d'où l'on conclut que ces masses ont éprouvé une révolution. — Indication plus positive encore des révolutions éprouvées par ces trois autres espèces de terrains.

Hypothèses proposées pour expliquer les révolutions observées. Ces hypothèses peuvent être réduites à trois principales, celles des *théurgistes*, des *hydrurgistes*, des *pyrurgistes*. Les hypothèses des hydrurgistes, comme l'hypothèse hydrogéenne, ont pris naissance en Égypte. Noms des principaux philosophes anciens et modernes qui les ont embrassées. Ces hypothèses, qui ont pour principal objet d'expliquer le passage et le séjour des eaux sur les plus hautes montagnes, peuvent être ramenées à six, celles de *Burnet*, de *Whiston*, de *Schutzer*, de *Buffon*, de *Lamannon*, de *Linnée*.

Examen de ces hypothèses; objections qui les détruisent.

Les hypothèses des pyrurgistes ont pris naissance dans l'Inde. Noms des principaux philosophes anciens et modernes qui les ont embrassées. Ces hypothèses, qui ont pour principal objet d'expliquer la formation des continens, des chaînes alpines, des montagnes isolées, peuvent se réduire à deux : 1.° soulèvement des masses par l'action des feux souterrains; 2.° projection des matières liquides ou boueuses de l'intérieur de la terre par l'action des feux souterrains. Les auteurs de cette dernière hypothèse apportent pour exemple les Cordillières et les nombreuses chaînes volcaniques des Açores, le pic de Ténérife, le Vésuve, l'Etna, les volcans éteints de l'Auvergne, et une foule d'autres.

Comme il existe dans les observations consignées dans les Mémoires des sociétés savantes, dans les Voyages de plusieurs géologues, des détails d'affaissemens de montagnes par des excavations occasionnées par les eaux, *Dolomieu* en a formé une hypothèse mixte.

Examen de ces hypothèses; objections qui leur sont faites.

Neuf classes d'observations doivent être expliquées, soit par la formation, soit par les révolutions arrivées :

Digitized by Google

1.° L'irrégularité des courbes des méridiens et des parallèles terrestres;

2.° La différence observée dans la forme des deux hémisphères;

3.° La densité moyenne de la terre, plus grande que celle des pierres qui existent à sa surface;

4.° La formation des chaînes alpines et de la profondeur des mers;

5.° L'irrégularité apparente ou réelle des couches des montagnes dans les chaînes alpines;

6.° Le séjour des eaux sur les plus hautes montagnes;

7.° Le creusement des grandes vallées dans les chaînes alpines;

8.° Les dépôts secondaires et tertiaires;

9.° Les os des animaux équatoriaux trouvés aux pôles.

Les hypothèses hydrogéenne, pyrogéenne, hydrurgiste et pyrurgiste, n'ont pas encore embrassé les trois premières classes d'observations. Quant aux six autres, on a essayé de les expliquer; mais les objections faites à ces explications les détruisent.

On s'est assuré que, dans l'état actuel du globe, l'axe de la terre a une position fixe et constante; mais pendant la durée de sa génération, cet axe a-t-il conservé sa même position? — Examen de cette question.

Effets qui devaient s'observer dans les deux hypothèses; dans celle de l'axe constant et dans celle de l'axe variable.

Examen des phénomènes qui s'observent dans l'atmosphère actuelle, comparés à ceux qui devaient se passer dans l'immense atmosphère qui a généré le globe de la terre; effet provenant de ces phénomènes.

Explication des quatre premières classes d'observations dans l'hypothèse atmogéenne; savoir: de l'irrégularité des courbes des méridiens et des parallèles; de l'inégalité des deux hémisphères; de la densité de la terre; de l'élévation des chaînes alpines et de la profondeur des mers; explication du séjour des eaux sur les sommités des hautes montagnes, et des causes qui les y ont transportées.

Lois de l'irrégularité apparente des couches des montagnes. Explication de cette loi dans l'hypothèse atmogéenne, et application aux révolutions que le globe a éprouvées.

Digitized by Google

Description des grandes vallées et de celles qui leur sont perpendiculaires. — Ordre que l'on y remarque, différent de celui que *Buffon* avait annoncé.

Observations des *courbes* qui terminent les vallées; phénomènes que l'on y remarque; causes de ces phénomènes; application de ces causes à la formation des vallées, toujours dans l'hypothèse atmogéenne.

De la formation des dépôts secondaires et tertiaires, des dépôts des ossemens d'animaux sous différentes latitudes, et des causes qui ont occasionné ces dépôts.

Résumé des différentes hypothèses. Comparaison des phénomènes qu'ils expliquent, et des objections qui leur sont faites. Motifs donnés à l'admission de l'hypothèse atmogéenne.

III.e Leçon.

De la Géologie. Lieux où se trouvent les différens terrains. — Minéraux que l'on y rencontre. — Manière d'être de ces minéraux. — Hypothèse sur leur formation.

De la recherche des minéraux à la vue, à la sonde, par puits et galeries.

Les six parties du monde : l'Europe, l'Asie, l'Afrique, l'Océanie, la Colombie ou Amérique septentrionale, et l'Amérique proprement dite ou Amérique méridionale, ont trois formes différentes. L'Europe et la Colombie ont la forme d'une pyramide; le sommet de celle d'Europe est le mont Blanc. Les eaux s'écoulent dans les mers qui environnent ces deux parties. L'Asie et l'Afrique ont la forme d'un cône tronqué, creusé à son sommet. Les eaux s'écoulent en partie dans les mers environnantes, et en partie par le centre; elles se réunissent dans de grands lacs ou de grandes mers intérieures, d'où elles sont transportées à la mer, soit par la vaporisation, soit par des conduits souterrains. L'Amérique proprement dite offre un terrain peu élevé, bordé à l'occident par de très-hautes montagnes. Les eaux s'écoulent presque en totalité

Digitized by Google

dans la mer Atlantique. L'Océanie est formée d'une suite d'îles dont les unes, comme la Notasie, ont la forme de l'Asie et de l'Afrique, et d'autres, celle de l'Europe.

Les eaux qui tombent sur les diverses parties de la terre s'écoulent à la mer en suivant les pentes des vallées. Ces vallées sont séparées les unes des autres par des chaînes de montagnes. Presque toutes les chaînes de séparation des grandes vallées sont formées de terrains primitifs. Sur le penchant de ces chaînes et dans quelques vallées élevées, on trouve le terrain secondaire. Le terrain tertiaire couvre ordinairement le milieu des vallées, aux approches de leur embouchure. Le terrain volcanique s'élève habituellement au-dessus du terrain primitif, et paraît sortir du milieu des masses antiques qui lui servent de base.

On trouve dans les terrains primitifs presque toutes les mines métalliques connues; on y trouve aussi la variété de houille connue sous le nom d'*anthracite*. Ces mines métalliques sont assez habituellement dans le grès; la houille anthracite est dans le schiste.

On trouve, dans les masses calcaires qui avoisinent les terrains primitifs, une houille maigre.

On trouve, dans le terrain secondaire, la houille grasse et quelques résultats de décomposition des minéraux des terrains primitifs.

On trouve, dans les terrains tertiaires, des mines de fer limoneuses, dites *de transport*.

Les minéraux métalliques se rencontrent de quatre manières différentes, disséminés, en couches, en masse ou en filons.

On a examiné les différentes hypothèses avec lesquelles on a cherché à expliquer la formation des gîtes de minérais; on s'est particulièrement occupé de l'hypothèse de *Werner*, que l'on a complétement réfutée; et l'on a fait voir que la formation des filons se déduisait naturellement de l'hypothèse atmogéenne, ainsi que celle des autres gîtes de minérais.

De la recherche des Minéraux.

Les anciens minéralogistes indiquent ordinairement deux manières

Digitized by Google

de reconnaître et de découvrir les minéraux dans les lieux où ils sont; l'une surnaturelle, l'autre naturelle.

Les moyens surnaturels sont, la baguette divinatoire, les convulsions, le mouvement spontané d'un corps suspendu.

On a réfuté rapidement ces méthodes empiriques, et l'on a fait connaître les moyens employés par les charlatans, soit pour faire tourner la baguette, soit pour communiquer du mouvement à un corps suspendu.

Les recherches sur des moyens naturels sont ordinairement au nombre de trois; recherches à la vue, recherches à la sonde, recherches par puits et galeries.

Les recherches et les découvertes à la vue ont été jusqu'à présent celles qui ont occasionné le plus grand nombre d'exploitations utiles. C'est en examinant avec soin les surfaces des masses des montagnes, les débris qui s'en détachent, en observant avec soin les nouvelles surfaces formées accidentellement sur un terrain connu, que l'on parvient à découvrir les minéraux métalliques que ces terrains renferment.

Les découvertes à la sonde se font en perçant avec une espèce de tarière les terrains que l'on soupçonne contenir des minéraux; la direction à donner au percement doit résulter de l'inclinaison et de la direction des gîtes de minérai que l'on recherche.

On a fait connaître la sonde, les pièces qui la composent, et la manière de diriger un trou de sonde.

Lorsque l'on parvient, en sondant, à découvrir un gîte de minérai, on détermine la direction et l'inclinaison de ce gîte par trois coups de sonde.

Lorsque l'existence du minérai est positive, on procède quelquefois à sa recherche par puits et galeries : ces percemens servent en même temps de moyens d'extraction. Les recherches par puits se font ordinairement dans les pays de plaine, et les recherches par galeries, dans les pays de montagne.

Digitized by Google

IV.e Leçon.

De l'extraction des minéraux disséminés. — De l'extraction, dans les PAYS DE MONTAGNE, des galeries de mines, de leurs formes et de leur percement. — Série d'expériences faites sur l'économie de la poudre et le chargement des trous de mines. — De l'extraction, dans les pays de plaine, à ciel ouvert, puits et galeries. — Modes d'exploitation des gîtes de minéral, lorsque les plans horizontaux, verticaux, ou inclinés que forme la gangue sont peu épais. — Modes d'exploitation des masses lorsque les plans horizontaux, verticaux, ou inclinés sont épais. — De l'exploitation des sels gemmes dans les terrains granitiques et dans les terrains calcaires.

Les minéraux d'or peuvent être disséminés dans la roche, comme ils le sont dans la haute Hongrie, ou dans des terrains moyens et dans des sables, comme au Pérou ; tout consiste à séparer ce minéral des terres et pierres avec lesquelles il est mélangé : on fait usage, pour cet effet, du bocardage et du lavage.

Les mines, dans les pays de montagne, sont attaquées par des galeries. On a parlé de leur forme et de leur dimension.

Le mode de percement des galeries varie avec la dureté de la roche. Les anciens perçaient leurs galeries dans la roche dure, avec des ciseaux, des coins, des leviers et du feu; les modernes les percent avec la poudre. — Description et comparaison de ces différentes méthodes.

On a décrit avec détail l'exploitation à la poudre, le percement des trous, leur chargement, l'effet de leur explosion; on a fait connaître les outils les plus commodes; on a rapporté des résultats d'expériences sur les percemens des trous à un et à plusieurs mineurs, et l'on a fait voir les circonstances dans lesquelles chaque mode pouvait être employé.

Les trous de mines peuvent être chargés en plaçant la bourre immédiatement sur la poudre, ou en laissant un espace vide. On peut, en les chargeant, comprimer fortement la bourre sur la poudre, ou la poser légèrement. On a rapporté les résultats des expériences faites pour déterminer dans chaque circonstance la méthode qui doit être préférée.

Digitized by Google

Les cartouches sont ordinairement remplies de poudre. On trouve, après l'explosion, des quantités plus ou moins grandes de poudre qui n'ont pas été enflammées, et qui ont été rejetées. Des expériences sur cet objet ayant été entreprises par l'ingénieur en chef *Baillet*, professeur d'exploitation, on a rapporté ces expériences et les résultats qu'elles ont présentés.

Lorsque des travaux sont submergés et qu'il faut extraire des roches sous les eaux, pour leur ouvrir un passage, il faut creuser les trous de mines, les charger et enflammer la poudre sous l'eau. On a décrit les moyens employés dans cette circonstance.

Les mines, dans les pays de plaine, sont exploitées à ciel ouvert, ou par puits et galeries.

On exploite à ciel ouvert les carrières, les tourbières, les ardoisières, &c.

On est entré dans quelques détails sur la formation des tourbières, les lieux où elles se rencontrent ; on a fait connaître leur mode d'exploitation lorsqu'elles peuvent être desséchées et lorsqu'elles sont submergées par les eaux ; on a décrit les différens outils dont on fait usage dans chaque circonstance.

Les schistes ardoisiers ont un mode particulier d'extraction. Il existe deux sortes d'ardoisières, qui sont exploitées, les unes à ciel ouvert, comme dans les environs d'Angers, les autres par puits, comme celles de Rimogne. On a fait connaître les moyens que l'on emploie pour enlever des tables plus ou moins grandes de ce schiste, que l'on débite ensuite, que l'on équarrit, pour livrer au commerce les ardoises qu'on en obtient. On a décrit les petites différences dans ce travail, en raison de la situation des couches horizontales, verticales et inclinées.

En traitant du percement des puits, on a indiqué les dimensions qu'on leur donne ordinairement, les formes qu'ils doivent avoir, et les circonstances dans lesquelles ils doivent être verticaux ou inclinés.

Lorsque, par le percement des galeries ou des puits, on est parvenu au gîte du minérai, il faut l'extraire.

Les minéraux en couches ou filons se présentent sous l'aspect d'une

Digitized by Google

surface plane ; courbe ou gauche, d'une épaisseur égale ou variée. Lorsque l'épaisseur de ces surfaces est entre un et quatre mètres, on l'exploite entièrement; lorsqu'elles ont moins d'un mètre, on exploite une portion de la roche avec le minéral, pour permettre au mineur de s'introduire dans le gîte.

On a détaillé les différentes méthodes employées selon que le gîte est horizontal, peu incliné, beaucoup incliné ou vertical, celles que l'on pratique lorsque le minéral a peu de valeur, et celles que l'on suit lorsqu'il est précieux; enfin comment on peut enlever sans danger les piliers de ces minéraux, que l'on est souvent obligé de laisser pour soutenir les roches qui recouvrent ce gîte.

Lorsque les couches ou filons de minéraux ont une grande puissance, on les exploite comme des masses. Dans cette circonstance, on emploie des méthodes qui dépendent de la richesse et de la cohésion des minéraux. Lorsque l'on veut retirer tout le minéral, on est obligé, si l'espace dans lequel il est contenu est considérable, de soutenir chaque partie par des étais ou des murailles, et on a fait connaître les différens modes pratiqués jusqu'à présent, et les améliorations dont ils sont susceptibles.

La houille, lorsqu'on l'extrait, doit être enlevée en grosses masses pour être employée plus commodément. On a décrit les divers procédés pratiqués pour cet objet.

Le sel est renfermé dans la terre sous deux états différens. Il est pur, diaphane, et déposé en grosses couches plus ou moins épaisses, comme à Wiliska en Pologne, ou bien il est mélangé avec des terres argileuses, calcaires et gypseuses, comme dans la Bavière et le Saltzbourg, &c. Dans le premier cas, on extrait directement le sel en masses plus ou moins grosses pour être livré au commerce. Dans le second, on fait dissoudre le sel, on sature l'eau qui le dissout, et l'on fait évaporer cette eau pour en obtenir le sel.

On a fait connaître les différens procédés employés dans chaque circonstance, ainsi que les perfectionnemens que ces procédés ont successivement obtenus.

Digitized by Google

V.e Leçon.

De la sortie des minéraux par les galeries, à dos d'hommes, avec la brouette et avec le chien. — Du transport hors de la mine sur des chemins boisés et ferrés. — Des transports sur les plans inclinés, avec des chariots, des caisses et des traîneaux.

De la sortie des minéraux par les puits, avec des treuils, des machines à molettes. — Des roues hydrauliques employées pour sortir les minéraux des puits, et des changemens de direction dans le mouvement qu'elles produisent. — Des machines à vapeurs, et de leur usage pour la sortie des minéraux.

Les minéraux sont sortis de la mine par des galeries ou par des puits, selon que le gîte du minéral a été attaqué par l'un ou l'autre de ces moyens.

On sort le minéral des galeries à dos d'hommes ou d'animaux; on le sort aussi en le chariant sur différentes machines.

Après avoir fait connaître les diverses manières dont les hommes peuvent porter et transporter les fardeaux, on a exposé les deux moyens pratiqués quelquefois dans l'intérieur des mines, en portant dans des hottes, et partageant le fardeau entre les épaules et les reins, ou dans des sacs, en se courbant et portant sur les reins seulement. Ce mode de transport est employé dans quelques mines qui ont des galeries très-basses, telles que celles des mines de houille des environs de Liége.

Les machines employées pour charier les minéraux dans les galeries, sont les brouettes, les traîneaux, les chariots. Les premières ne sont mues que par les hommes; les secondes peuvent l'être par des hommes ou des chevaux. Rarement les chevaux ou les autres animaux sont employés pour les transports intérieurs, à cause des grandes dimensions qu'il faudrait donner aux galeries.

Examen comparé de l'effort des hommes et de leur produit journalier, lorsqu'ils charient avec les différentes machines.

La machine la plus généralement employée dans l'intérieur des mines, est le chariot à quatre roues, connu sous le nom de *chien*, ou caisse.

Digitized by Google

En traitant de ce chariot, on a comparé les effets des charettes à deux roues avec ceux des chariots à quatre roues égales relativement aux forces employées pour les mouvoir, et l'on a discuté les raisons qui déterminaient, dans des circonstances différentes, l'adoption de l'une ou l'autre de ces voitures.

Les transports des minéraux de l'embouchure des mines aux lieux où ils doivent être préparés ou employés, se font sur des chariots ou sur des traîneaux. On a cité des exemples de transports sur des traîneaux, particulièrement dans le temps des neiges, et sur les pentes des montagnes; on a comparé ces charois à ceux faits sur des voitures.

Les chemins sur lesquels roulent ces voitures, ont une influence considérable sur la quantité de minéral transporté avec le même nombre de chevaux. On a été conduit à parler des chemins pavés, boisés et ferrés, soit en plaine, soit sur le penchant des montagnes, et l'on est entré dans quelques détails sur leur construction.

On sort le minéral des puits avec des machines qui varient selon le moteur que l'on peut employer.

Généralement le minéral se met dans des paniers, des tonnes, des caissons, que l'on attache à l'extrémité d'un câble : celui-ci se roule sur un treuil, et par sa rotation ce minéral est enlevé.

Les machines sont mues par des animaux, par le vent, par l'eau, ou par la vapeur de l'eau.

Les machines mues par des animaux sont le treuil et la machine à molettes.

On a décrit le treuil, et l'on a détaillé ses effets.

On a décrit les machines à molettes, et l'on est entré dans quelques détails sur la surface courbe de révolution que doit avoir le treuil sur lequel la corde s'enveloppe; on a fait connaître les machines à molettes fixes, et celles que l'on place instantanément.

Les machines à molettes peuvent être mues par des hommes ou par des animaux.

On a cité des exemples de machines à molettes, mues par des hommes

Digitized by Google

et des femmes marchant dans un tambour, et l'on a comparé les effets obtenus par des chevaux à ceux produits par des femmes et des hommes; soit que ces derniers eussent agi par l'action de leur poids en marchant dans un tambour, ou par leur force d'attraction en marchant sur un plan.

On a fait connaître les divers moyens par lesquels on rend l'effort des animaux uniforme lorsque le treuil des machines à molettes est cylindrique.

Les machines mues par le vent étant peu en usage dans l'intérieur des mines, on s'en est peu occupé.

Les machines peuvent être mises en mouvement par un courant d'eau, par une chute d'eau, ou par la double action d'un courant et d'une chute. On a traité des machines employées dans ces divers cas, et on les a divisées en machines à roues et machines à colonnes d'eau.

Les roues soumises à l'action de l'eau ont ordinairement leur mouvement de rotation dans une direction constante; le treuil sur lequel la corde s'enveloppe devant changer de direction, il faut adapter aux roues un moyen propre à opérer ce changement.

Le changement de direction peut être appliqué directement à la roue; on peut encore, en laissant à la roue une direction constante, établir un mécanisme qui change à volonté la direction du treuil.

On a détaillé les différens moyens employés dans les mines, soit pour changer la direction de la roue, soit pour changer celle du treuil, en supposant constante la direction du mouvement de la roue.

Les machines à colonnes d'eau, étant introduites depuis quelque temps dans les travaux des mines, il était intéressant de les faire connaître; mais leur mécanisme se rapprochant de celui des machines à vapeur, on a dû détailler d'abord celles-ci, afin de mieux faire connaître les premières.

Les machines à vapeur ont été décrites avec détail. On a décrit séparément le mécanisme et le mouvement des machines à simple effet, et celui des nouvelles machines à double effet. Cette description a dû

Digitized by Google

être précédée de l'historique de leur invention et de leur perfectionnement.

Les machines à vapeur ordinaires ont pour objet de produire un mouvement de va-et-vient, que l'on change en mouvement d'oscillation que l'on applique aux pompes. Ce que l'on se propose en extrayant les minéraux des mines, c'est de procurer un mouvement de rotation à l'axe qui porte le treuil, ce qui a exigé la description des machines de rotation.

La machine de rotation mise en mouvement, tend à continuer sa rotation dans la direction qu'on lui donne; le treuil devant changer de direction après chaque élévation, on emploie, pour ce changement, divers moyens, les uns appliqués directement à la machine de rotation, les autres au treuil : on a détaillé ces moyens.

VI.e LEÇON.

DES ÉTAIS et des MURAILLEMENS; des propriétés, des qualités et du choix des bois; de la nature et du choix des pierres extraites de l'intérieur des mines. — Des étais dans les galeries; des circonstances dans lesquelles on doit étayer; des étais dans les galeries percées dans le roc, dans les mines en masses et dans les gîtes horizontaux; des étais dans les gîtes inclinés et verticaux. — Des étais ou BOISAGES dans les PUITS. — Des muraillemens dans les galeries et dans les puits. — De la DESCENTE DANS LES MINES; de la descente à l'aide des machines; de la descente par les échelles; des différentes échelles et des manières de les poser.

DES ÉTAIS, BOISAGES ET MURAILLEMENS.

LES bois employés pour étayer et boiser, jouissent de plusieurs qualités qui établissent une préférence entre eux; ils sont gros, résistans et putrescibles. Tous participent de ces trois qualités, à des degrés différens.

Les bois, dans les mines, étant destinés à supporter des fardeaux, doivent avoir, dans chaque circonstance, une force proportionnée aux fardeaux; cette force dépend de leur grosseur et de leur résistance. Ainsi, à résistance égale, il faut préférer ceux qui peuvent acquérir

Digitized by Google

beaucoup de grosseur; tels sont le *chêne*, l'*orme*, le *sapin*, le *mélèze*, le *cèdre*, &c.

Il a été fait un grand nombre d'expériences sur la loi de la résistance des bois. Ces expériences, entreprises par *Mariotes*, *Parent*, *Varignon*, *Bellidor*, les deux *Duhamel*, *Buffon*, *Perronet*, *Lamblardie* et *Girard*, ont prouvé par l'analyse que la résistance des solides était, comme la directe des largeurs, l'inverse des longueurs et le carré des hauteurs. On a fait connaître les moyens employés par plusieurs savans pour obtenir ces résultats.

Jusqu'alors il n'avait été fait d'expériences que sur la résistance comparée du *chêne*, du *sapin*, du *pin du nord* et du *saule*. J'ai rapporté les résultats des expériences que j'ai faites sur la résistance de plusieurs espèces de bois, parmi lesquelles les plus résistans sont le *faux acacia*, l'*alisier*, le *prunier*, le *chêne*, le *charme*, le *hêtre*, l'*if*, l'*orme*, &c.

Les bois exposés, dans l'intérieur des mines, à l'action continue de l'humidité et de la chaleur, y fermentent et se pourrissent plus ou moins promptement. La théorie de la pourriture des bois présente des phénomènes particuliers; il était utile à l'instruction de faire connaître les causes de la putréfaction, de faire distinguer les circonstances les plus favorables à ses résultats, ainsi que celles qui lui sont contraires, afin de donner les moyens d'empêcher ou de retarder, autant qu'il est possible, cette action destructrice des bois. On est entré dans de grands détails sur la théorie de la putréfaction des bois, et sur les moyens de les en préserver ou d'en retarder les effets. A la suite de cette théorie, on a rapporté les résultats d'observations faites sur la putréfaction des différens bois, d'où il résulte que les moins putrescibles sont le *cèdre*, le *mélèze*, le *merisier*, l'*aune*, l'*orme*, &c., et faisant cependant remarquer que ces bois présentent dans la marche de leur putréfaction, des anomalies dépendantes de l'humidité des mines, du terrain, de l'exposition ou de la latitude des lieux où ces bois ont cru.

Les pierres que l'on retire de l'exploitation des gîtes des minérais sont souvent pénétrées de sulfure métallique; d'autres sont de pur roc. Les premières

Digitized by Google

premières se pulvérisent par la décomposition des sulfures, et ne peuvent être employées ; les secondes se détachent par blocs arrondis ou par couches. Ces dernières sont préférées.

Les pierres, indépendamment des altérations qu'elles peuvent éprouver, et des formes qu'elles ont, et qui déterminent le choix que l'on doit en faire, ont encore des résistances variées, d'après lesquelles on établit la préférence lorsque l'on est à même de choisir.

Le boisage et le muraillement occasionnent des dépenses très-différentes ; comme elles ont des durées extrêmement variables, on se détermine sur le choix, d'après la durée des travaux, l'économie, les fonds et les ouvriers disponibles.

DES ÉTAIS DANS LES GALERIES.

Les galeries sont étayées par-tout où le roc ou la gangue du minéral ne présentent pas assez de solidité. Les étais sont serrés ou écartés selon que les besoins l'exigent. Leurs formes varient avec celles des masses à soutenir : souvent il ne faut que des poteaux pour les opposer à la poussée verticale ; d'autres fois il faut vaincre la poussée latérale et verticale ; d'autres fois enfin il faut retenir les éboulemens, ce qui exige que des planches ou des éclats soient placés entre chaque système d'étais.

On est entré dans les plus grands détails sur la théorie de l'*étaiement ;* on a fait connaître la forme des étais, selon les lieux et les circonstances, les coupes particulières à chaque forme pour assurer leur solidité, économiser le travail, faciliter leur placement et opposer la résistance nécessaire dans tous les lieux où ils sont utiles ; on a fait connaître les différens modes d'étais employés dans les galeries percées dans le roc, les mines à masse, les gîtes horizontaux, et dans les galeries des gîtes inclinés et verticaux ; les cas où ces étais ne servent que de résistance à l'effort des masses, ceux où ils deviennent moyens d'échafaudage.

DU BOISAGE ET DU CUVELAGE DES PUITS.

Lorsque les puits verticaux ou obliques sont creusés dans des rocs ou dans des mines dont l'effort des parois est à craindre, on les étaie ou on

Digitized by Google

les boise. On a fait connaître les modes d'étayer employés, relativement aux dimensions des puits et aux usages auxquels on les destine, soit pour élever les eaux, soit pour porter le minéral, soit pour servir de passage aux mineurs, ainsi que les différences que ces modes éprouvent relativement à l'effort ou à la friabilité des terrains.

En creusant des puits, on rencontre souvent des sources plus ou moins abondantes; ces sources doivent être bouchées, pour ne pas noyer les travaux, et pour économiser les dépenses d'extraction des eaux. On a fait connaître les différentes opérations qui ont pour objet de boucher les sources, ou d'étayer les puits et boucher les sources en même temps; ce qui a conduit à décrire les méthodes de cuvelage employées dans plusieurs mines qui seraient inondées sans cette précaution.

Le muraillement complet des galeries et puits s'exécute rarement; cependant, comme il a lieu dans quelques mines, il a fallu le détailler. Le muraillement partiel est assez ordinaire. On a décrit ces deux sortes de muraillemens dans les galeries, soit à pierres sèches, soit à chaux et ciment. On a fait connaître les formes de ces muraillemens, selon les efforts du terrain, enfin les muraillemens en plein dans les grandes galeries de passage et d'écoulement.

Les muraillemens des puits exigeant des précautions et nécessitant des formes de construction dépendantes de la hauteur des puits, de l'obligation où l'on est de construire successivement, à mesure que l'on descend, et de prendre le muraillement par le pied, ces circonstances exigent que le mode de construction soit tel que l'action de la pesanteur du mur s'exerce moins sur les assises inférieures que contre les faces du rocher. On a donc détaillé ce mode particulier de construction, ainsi que ceux résultant des différentes causes qui occasionnent le muraillement.

DE LA DESCENTE DANS LES MINES.

On entre dans l'intérieur de la terre par des puits ou par des galeries. L'entrée par les galeries ne présente aucune difficulté; l'entrée par les

Digitized by Google

puits se fait, soit à l'aide des machines qui servent à extraire le minéral, soit par des échelles.

On ne fait usage, pour descendre dans les mines, des machines destinées à sortir le minéral, que lorsqu'il n'existe pas d'autres moyens; ces machines présentent des inconvéniens graves dont on a fait l'énumération.

Les échelles par lesquelles on descend, sont de quatre sortes; elles sont placées verticalement ou obliquement dans quelques puits, et l'on établit des planchers de distance en distance, pour que les mineurs puissent se reposer; dans d'autres, quelle que soit la profondeur du puits, il faut le monter ou le descendre directement et sans repos.

On a fait connaître les quatre espèces d'échelles que l'on emploie. On a discuté l'avantage et le désavantage des repos; et après avoir comparé les différentes manières de poser les échelles, on a indiqué celle qui est la plus avantageuse.

VII.e LEÇON.

DE L'EXTRACTION DES EAUX par des galeries d'écoulement, dans les pays de montagne; par des machines, dans des pays de plaine. — Description des pompes et des moteurs qui les font mouvoir. — De la machine à colonne d'eau.

DE L'AÉRAGE. Principe sur lequel est fondée la circulation de l'air dans les mines; application de ce principe. — De l'aérage à l'aide des machines; description de celles qui sont généralement employées.

DE LA LEVÉE DES PLANS. Des causes qui établissent des différences entre la levée des plans des terrains et celle des plans des mines; des instrumens dont on fait usage, et des procédés que l'on emploie pour la levée des plans des mines; du mode adopté dans le dessin des plans.

DE L'EXTRACTION DES EAUX.

Assez généralement, lorsque les mines sont dans des pays de montagne, les gîtes de minéral sont élevés au-dessus des fonds des vallées. Lorsque les excavations se font dans cette circonstance particulière, on perce des galeries d'écoulement par lesquelles les eaux sortent au jour. Si

Digitized by Google

le sol des vallées est au-dessus des excavations, on fait usage de pompes ou d'autres machines pour élever les eaux dans les galeries d'écoulement.

Lorsque les mines sont exploitées dans des plaines, on sort les eaux au jour par des pompes placées dans des puits destinés ordinairement à cet usage.

Les pompes sont aspirantes, foulantes, ou foulantes et aspirantes. Ces dernières sont le plus généralement employées.

On fait mouvoir les pompes à bras d'hommes, avec des chevaux, des courans d'eau ou des machines à vapeur, selon les lieux et la facilité que l'on a de se procurer et d'employer ces divers moteurs, et suivant l'économie que chacun de ces moyens présente.

Souvent on fait usage d'un courant d'eau très-éloigné; alors le mouvement de la roue se propage, à l'aide de différens mécanismes, jusqu'à l'ouverture du puits. On a cité plusieurs exemples des mécanismes employés, parmi lesquels celui qui a été appliqué à la machine de Marly, est un des plus anciens.

Lorsque les galeries d'écoulement servent à la sortie des eaux supérieures et inférieures des excavations, on profite des chutes intérieures et supérieures pour extraire les eaux inférieures, et l'on construit pour cet effet diverses machines, parmi lesquelles celle à colonne d'eau est souvent préférée. On a décrit ces diverses machines.

DE L'AÉRAGE.

Les animaux ne peuvent vivre, les combustibles ne peuvent brûler que là où il y a de l'air oxigène.

Il se dégage dans l'intérieur de la terre des mofettes, des gaz malfaisans; les hommes, en séjournant dans les excavations avec les lumières nécessaires pour les éclairer, absorbent l'oxigène contenu dans l'air, et le vicient; les sulfures métalliques, dans un état de décomposition plus ou moins avancé, contribuent aussi à vicier l'air en formant des sulfates. Toutes ces causes de désoxigénation seraient mortelles pour les hommes

Digitized by Google

qui séjournent dans les mines, si l'on n'établissait dans leur souterrain, au milieu des excavations, des courans continuels.

Le principe général de l'aérage naturel est celui de la différence de pression occasionnée par des colonnes d'air plus ou moins denses.

L'air extérieur éprouve des températures différentes qui font varier sa densité; l'air intérieur éprouve une température uniforme qui rend sa densité constante. S'il existe dans les mines deux ouvertures extérieures situées à des hauteurs différentes, les colonnes d'air extérieur et intérieur pèseront inégalement sur l'ouverture inférieure, à raison de leur densité, et il s'établira un courant de sortie d'air par cette ouverture, lorsque la colonne intérieure sera plus dense que la colonne extérieure, et un courant d'entrée d'air lorsque l'inverse aura lieu.

Par cela seul qu'une communication est établie de l'intérieur à l'extérieur par deux ouvertures différemment élevées, on peut déterminer des courans naturels dans un sens ou dans un autre, par la différence de température extérieure et intérieure. Lorsque les températures sont égales, les forces étant en équilibre, l'air devrait être sans mouvement; mais comme cet état d'équilibre dure peu, le mouvement déjà établi occasionne une continuation, et il n'y a de repos qu'au moment où, par la variation des forces, le courant qui avait lieu dans une direction, va passer dans une autre.

Par le moyen de portes et de trapes placées dans les galeries et dans les puits, on détermine les lieux dans lesquels les courans doivent être formés, et en perçant des ouvertures aux portes et aux trapes, on les modifie.

Lorsque les hauteurs des deux ouvertures ont peu de différence, on augmente celle qui est déjà la plus élevée, en construisant au-dessus de longues cheminées; on parvient ainsi à obtenir des courans très-rapides dans des excavations dans lesquelles l'air se renouvelait difficilement.

Enfin, lorsque ces hautes cheminées ne suffisent pas pour déterminer des courans naturels, on les excite par des brasiers suspendus au sommet de l'ouverture.

Digitized by Google

Comme la théorie de l'aérage des mines est la même que celle des courans dans les appartemens, les cheminées et les poëles, on a fait une application de cette théorie à la caminologie; on a fait connaître les causes qui contribuent à faire refluer la fumée dans les appartemens, et l'on a indiqué les moyens d'empêcher ce reflux, de faciliter la combustion et d'obtenir le *maximum* d'échauffement.

Lorsque l'on ne peut avoir deux ouvertures situées à des hauteurs différentes, et que l'on ne peut par ce moyen établir une circulation naturelle, on détermine un courant d'air par l'action des combustibles brûlant, ou par celle des machines soufflantes.

On a fait connaître les différentes manières de faire usage du feu pour établir un courant d'air, et l'on a décrit les diverses machines soufflantes employées dans les mines; enfin, l'on a indiqué comment on parvient, à l'aide des eaux qui s'écoulent dans les galeries d'écoulement, à obtenir une circulation d'air intérieur.

DE LA LEVÉE DES PLANS.

L'INTÉRIEUR des mines est formé d'une suite d'excavations qui présentent des directions et des inclinaisons très-variées. Souvent ces excavations sont composées de plusieurs galeries très-étroites; quelquefois elles présentent de grands vides irréguliers.

Les instrumens que l'on doit employer pour lever ces excavations, doivent être simples, commodes et portatifs.

Après avoir fait l'essai des graphomètres, du cercle répétiteur, des niveaux et des autres instrumens que l'on emploie à l'extérieur, les mineurs se sont décidés à n'employer que la boussole, la chaîne et le demi-cercle.

Ils ont donné à ces instrumens une forme particulière qui rend leur usage plus commode.

On a décrit la poche du mineur, les instrumens qui la composent, et la manière dont on en fait usage.

La méthode adoptée consiste en une suite d'opérations par lesquelles

Digitized by Google

on prend la direction, l'inclinaison et la longueur de chaque station, que l'on rapporte toujours à trois plans perpendiculaires entre eux, l'un horizontal, les deux autres verticaux; l'un dans le sens du méridien, et l'autre des parallèles. Chaque opération est calculée pour obtenir les coordonnées à chaque plan.

Comme les opérations sont très-multipliées et présentent une chance d'erreurs considérables dépendantes, soit des instrumens, soit de l'opération, il est peu de levées qui exigent plus de soin, d'habitude et de connaissances des instrumens employés.

On a soin, autant qu'il est possible, de commencer l'opération d'un point de l'intérieur sur lequel on puisse revenir après une suite d'opérations, ou de deux points communiquant à l'extérieur, et dont on puisse avoir les positions exactes. On juge que le plan est bien levé, lorsqu'en le rapportant on peut revenir au point ou aux deux points sur lesquels l'opération doit se terminer.

Pour comparer tous les plans de mines entre eux, et juger à un simple aperçu des positions et des dimensions, on trace sur chaque plan des carrés formés de lignes tracées dans la direction des deux autres plans, et qui sont à dix ou cent mètres de distance l'un de l'autre.

Sur les plans verticaux, le zéro part du niveau de la mer; on connaît, par ce moyen, la hauteur de tous les travaux au-dessus d'un niveau constant.

VIII.e Leçon.

De l'état du minéral au sortir de la mine; des préparations mécaniques qu'on lui fait subir. — Du LAVAGE, *du* CRIBLAGE. *Des machines à laver; du patouillet; des laveries en gradins. — Du* TRIAGE. *— Du* BOCARDAGE. *Description des bocards à sec, stables et mobiles; des bocards à eau et de leur labyrinthe. — De la* SÉPARATION *à la main et par l'eau. Théorie de la séparation par l'eau. Des tables à laver, des tables allemandes.*

Le minéral, en sortant des mines, est rarement pur; souvent il est sali par une enveloppe qui empêche de le reconnaître; plus souvent il

Digitized by Google

est mélangé avec la roche ou la gangue qui remplit le gîte. Il faut, avant de le livrer aux usines, séparer, par des moyens mécaniques, les substances étrangères qui y sont mélangées. On emploie, pour cet effet, quatre procédés : 1.° le lavage et le criblage ; 2.° le triage ; 3.° le bocardage ; 4.° la séparation par le moyen de l'eau.

DU LAVAGE ET DU CRIBLAGE.

Le lavage du minéral s'exécute de plusieurs manières ; souvent on se contente d'exposer le minéral à l'action d'un courant d'eau ; d'autres fois on le met dans un réservoir, dans lequel il éprouve un mouvement continuel par l'action d'une machine apelée *patouillet ;* d'autres fois le minéral est jeté dans une auge sur laquelle passe un fort courant d'eau : les morceaux entraînés par le courant, passent à travers un gros grillage ; ils tombent avec l'eau sur une auge dont le fond est formé d'un grillage plus fin : ceux qui passent à travers ce dernier, sont entraînés par l'eau sur une autre auge, dont le fond est formé d'un grillage plus fin encore : le minéral lavé dans chaque auge de la *machine à gradins,* est divisé en morceaux d'épaisseurs différentes. D'autres fois enfin le minéral est lavé dans des paniers, des cribles ou autres instrumens semblables. Des hommes, des femmes et des enfans sont employés à ces opérations.

On a décrit les diverses machines employées à laver le minéral.

DU TRIAGE.

Si le minéral sorti au jour est propre, on peut distinguer entre eux les morceaux qui contiennent du minéral de ceux qui ne sont composés que de roches ou de gangues pures. Lorsqu'ils sont sales, on les lave pour le reconnaître ; ensuite on trie à la main les petits morceaux de roche, ceux qui contiennent du minéral pur, et que l'on nomme *mine grasse ;* enfin ceux qui sont intimement mélangés de gangue et de minéral : ces derniers sont livrés aux bocards.

Les gros morceaux se cassent avec des masses pour en séparer le minéral ; des enfans et de vieux mineurs séparent avec des marteaux la mine grasse.

DU

Digitized by Google

DU BOCARDAGE.

Le minéral mélangé est pulvérisé pour séparer plus facilement les parties métalliques de la roche ou de la gangue mélangée.

La pulvérisation se fait avec des pilons ou avec des meules; le plus généralement on fait usage de pilons : les meules ne sont employées que dans quelques cas particuliers, tels, par exemple, que la pulvérisation de la calamine.

De toutes les machines à pulvériser au pilon, le bocard a constamment la préférence.

On a fait connaître les différentes machines qui ont été successivement employées dans les mines pour pulvériser le minéral; toutes ont été comparées au bocard.

On a décrit les bocards employés dans divers arts; on a fait connaître les différences que ces bocards doivent avoir entre eux relativement à leur destination, et l'on a fait remarquer ce que chaque bocard a, dans sa construction, d'avantageux et de défectueux.

Après avoir indiqué le but et la destination générale des bocards, on a fait connaître leur théorie, et l'on a donné une description du bocard employé dans les mines : on a comparé celui-ci à ceux que l'on emploie dans les arts, et l'on a fait connaître sa supériorité.

Les bocards sont à sec ou à eau, selon la destination de la matière pulvérisée. Les bocards à sec sont à fond fixe ou mobile.

On a donné une description détaillée des différens bocards, ainsi que des labyrinthes qui accompagnent les bocards à eau, et qui sont destinés à opérer un commencement de séparation des matières grossières et pesantes des matières fines et légères.

DE LA SÉPARATION.

Lorsque les minéraux mélangés ou maigres ont été pulvérisés, on a un mélange de minéral métallique de roche et de gangue en poudre, qu'il faut séparer.

Digitized by Google

On emploie pour cet effet des courans d'eau, et l'on fait usage de deux principes de statique et de dynamique : le premier, que les résistances des milieux sont comme les densités ou les masses lorsque les corps ont un même volume, et comme les carrés des diamètres, lorsque les masses sont les mêmes ; donc comme les carrés des diamètres par les masses : le second, qu'à densité égale, le courant exerce plus d'action sur de plus grandes surfaces, et qu'à des surfaces égales le courant exerce plus d'action sur les corps plus légers.

En faisant usage du premier principe, on sépare, par leur suspension dans l'eau, les corps fins réduits en poudre très-fine, de ceux qui sont plus gros. On a indiqué plusieurs exemples de ces séparations obtenues dans les arts ; on a fait connaître l'avantage que ce moyen présente, et la préférence qu'on doit lui donner sur tous les autres, lorsque les substances peuvent être mouillées par l'eau.

En faisant usage des deux principes réunis, on sépare les matières grosses des fines, par l'action du courant sur de plus grandes surfaces, et l'on sépare les substances fines des grosses par la plus grande difficulté que leur masse éprouve à vaincre la résistance de l'eau.

On a décrit les procédés employés, d'après ces principes, pour séparer plusieurs substances qui ont une grande différence de densité et de grosseur ; tels sont ceux que pratiquent les orpailleurs dans diverses parties de l'Europe, ceux employés par les Espagnols et les Portugais pour séparer l'or et le platine des sables avec lesquels ces métaux sont mélangés.

Lorsque ces différences de densité et de grosseur sont peu considérables, on emploie des moyens plus appropriés aux petites différences.

Généralement on fait usage des tables à laver, on leur donne des dimensions, des formes et des inclinaisons dépendantes de ces différences.

On a décrit les différentes tables à laver dont on fait usage, particulièrement les tables ordinaires et les caisses allemandes, et l'on est entré dans quelques détails sur les manipulations applicables à ces différentes

Digitized by Google

tables, sur-tout lorsque la différence de densité entre les substances à séparer est peu considérable.

Si la gangue et le minéral ont une densité sensiblement égale, ce qui a lieu lorsque la gangue est de sulfate de baryte, on fait usage de tables peu inclinées, auxquelles on communique un mouvement analogue à celui que les vanneurs de grains impriment au van. Les tables sont suspendues, et ce mouvement leur est communiqué par des cames fixées sur une roue qu'un courant d'eau fait mouvoir.

On a décrit les tables à secousses; on a fait connaître le mécanisme qui s'y applique, et l'on a expliqué le procédé et les causes de la séparation.

Lorsque le minéral a été détaché de la roche et sorti au jour, que là il a été nettoyé et séparé de sa gangue, on le livre aux usines destinées à employer des moyens chimiques pour séparer les substances métalliques des autres substances qui y sont combinées.

Digitized by Google

ANNONCE

De la Feuille publiée sous le titre de Correspondance sur l'École Polytechnique, *à l'usage de cette École* (*),

Par M. HACHETTE.

LE Journal de l'École ne paraissant qu'à des époques fort éloignées les unes des autres, on sentait depuis long-temps la nécessité d'avoir, pour son usage, une Feuille qui parût à des époques plus rapprochées.

Les Élèves sortis de l'École polytechnique, dont les uns suivent la carrière des sciences, d'autres remplissent les fonctions d'ingénieurs dans les services publics, desirent apprendre les succès qu'ils obtiennent dans les parties auxquelles ils se sont livrés.

La *Correspondance* a paru remplir le vœu de toutes les personnes attachées à l'École. Cette Feuille fait connaître les travaux des Professeurs et des Élèves; on y publie les actes du Gouvernement qui concernent le régime intérieur de l'École, sous le rapport d'instruction et d'administration.

La table suivante des cinq premiers numéros (formant 176 pages d'impression, avec planches) indiquera l'ordre qu'on a suivi dans le choix des articles qui les composent.

I.er NUMÉRO. *Germinal an 12.*

§. I.er *Tableau qui indique l'ordre des Cours, leur durée, et les Instituteurs qui en sont chargés.*

§. II. *Notice sur les travaux de l'École, année 11 et 12.*

Des points singuliers des courbes, par M. *Poisson.*

D'un nouveau bleu pour la peinture, par M. *Thenard.*

(*) Les cinq numéros de cette feuille qui ont paru jusqu'à présent (février 1806), se distribuent dans les bureaux de l'administration de l'École.

Digitized by Google

D'un nouveau doubleur d'électricité, par MM. *Desormes* et *Hachette*.

§. III. *Événemens particuliers et Anecdotes.*

Don de 2,400 liv. fait par les Élèves, le 6 prairial an 11, pour la guerre contre l'Angleterre. — Construction d'une chaloupe canonnière sous le nom de *la Polytechnique*. — Trente Élèves choisis dans le sein de l'École, et mis, par une instruction spéciale de trente jours, en état d'être employés aux constructions de la marine.

§. IV. *Personnel.*

État nominatif des Élèves sortis de l'École polytechnique, du 1.er frimaire an 11 au 1.er frimaire an 12.

Liste des Élèves admis à l'École, à dater du 1.er frimaire an 12.

Promotion extraordinaire du 1.er ventôse an 12, pour l'artillerie.

II.e NUMÉRO. *Fructidor an 12.*

§. I.er *Mémoire sur le Contact des sphères, par M.* Hachette.

Ce mémoire contient la solution de ces deux problèmes : Trouver une sphère tangente à quatre sphères données.

Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan; de quelques propriétés des surfaces du second degré, par M. *Livet*, répétiteur à l'École polytechnique.

Annonce des ouvrages publiés par d'anciens Élèves de l'École.

PHYSIQUE. De l'inflammation de l'amadou, et de la fusion du métal de *Darcet*, par l'air comprimé.

Du syphon à écoulement dans le vide.

Du belier hydraulique de *Montgolfier*. Nouvelles expériences sur cette machine; méthode pour estimer son produit, applicable à toutes les machines hydrauliques. (Ces trois articles de physique sont de M. *Hachette*.)

Description d'un lapis lazuli cristallisé, découvert par MM. *Clément* et *Desormes*.

§. II. *Événemens particuliers et Anecdotes.*

III.e NUMÉRO. *Pluviôse an 13.*

§. I.er

Solution complète de la pyramide triangulaire (par la ligne droite et le cercle), par M. *Hachette*.

Digitized by Google

Démonstration du théorème de *Taylor*, par M. *Poisson*.

Des courbes à double courbure, et de la ligne des centres osculateurs de ces courbes, par M. *Lancret*, ancien Élève.

PHYSIQUE. Voyages aérostatiques de MM. *Biot* et *Gay-Lussac*.

Annonces d'ouvrages publiés par des personnes de l'École.

§. II. *Annonces et Anecdotes.*

§. III. *Personnel.*

État nominatif des Élèves sortis de l'École, du 1.er frimaire an 12 au 1.er frimaire an 13.

Liste des Élèves admis à l'École, à dater du 1.er frimaire an 13.

§. IV. *Actes du Gouvernement.*

Décret impérial, du 27 messidor an 12, qui donne à l'École polytechnique une organisation militaire.

Décret qui nomme le Conseiller d'État LACUÉE, Gouverneur de l'École polytechnique.

IV.e NUMÉRO. *Messidor an 13.*

§. I.er

De l'intégrale de l'équation différentielle à deux variables, $y = xF.p + f.p$, F et f étant des fonctions quelconques de $p = \frac{dy}{dx}$, par M. *Monge*.

Du contact des surfaces coniques avec les surfaces du second degré, par M. *Livet*.

Solution donnée par les Élèves, d'une question qui leur avait été proposée par M. *Legendre*, membre de l'Institut national.

Énoncé de deux problèmes de géométrie, proposés à MM. les Élèves.

Démonstration du parallélogramme des forces, par M. *Duchayla*, ancien Élève.

PHYSIQUE. De la combinaison des gaz oxigène et hydrogène produite par la compression, par MM. *Hassenfratz* et *Biot*.

Description du thermoscope donné par M. *de Rumford* à l'École polytechnique.

LITTÉRATURE. Du cours de M. *Andrieux*, professeur.

Annonce d'ouvrages publiés par des personnes de l'École.

§. II. *Événemens particuliers et Anecdotes.*

Digitized by Google

§. III. *Personnel.*

État général des Élèves qui ont été admis à l'École polytechnique pendant les onze premières années de son établissement (depuis l'an 3 jusques et compris le 1.er frimaire an 13), avec des notes relatives à ceux qui ont obtenu des succès distingués dans la carrière qu'ils ont embrassée.

Tableau qui indique leur répartition dans les différens services publics.

§. IV. *Actes du Gouvernement.*

V.e NUMÉRO. *Messidor an 13.*

§. I.er

MÉCANIQUE. Conditions de l'équilibre des corps solides, par M. *Poisson.*

OPTIQUE. Analyse d'un Mémoire de M. *Malus*, ancien Élève, chef de bataillon du Génie.

GÉOMÉTRIE. Analyse d'un Mémoire sur les surfaces du second degré, de M. *Dupin*, ancien Élève, ingénieur-constructeur.

Solution du problème : « Déterminer le jour de l'année par lequel le crépuscule est » le plus petit », par M. *Hachette.*

Sur les courbes et les surfaces du second degré, par M *Brianchon*, Élève.

PHYSIQUE. Expérience sur le magnétisme de la pile électrique, par M. *Hachette.*

Établissemens dirigés par des professeurs de l'École polytechnique.

École des sciences et belles-lettres, rue de Sèvre, n.° 106.

École d'architecture et d'admission à l'École polytechnique, rue de Seine, n.° 6.

Annonce de livres publiés par des personnes de l'École.

§. II.

Sixième session du conseil de perfectionnement; liste des membres qui l'ont composé.

§. III. *Personnel.*

Liste des Élèves admis, à dater du 1.er frimaire an 14.

§. IV. *Actes du Gouvernement.*

Programme des connaissances exigées en 1806 pour l'admission à l'École polytechnique.

Digitized by Google

NÉCROLOGIE.

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE vient d'éprouver une perte qui excite justement ses regrets. M. *Lermina*, administrateur de cette école, a terminé sa carrière le 22 janvier de cette année (1806), dans la cinquante-septième année de son âge.

Né avec l'amour des sciences, mais attaché dès sa jeunesse à des devoirs de bureau qu'il remplissait avec une exactitude scrupuleuse, *Claude Lermina* parvint cependant, à force de privations et de travail, à satisfaire son goût dominant pour l'histoire naturelle. Ses succès dans la botanique et dans la minéralogie lui avaient procuré des liaisons avec le célèbre *Romé de Lille*, et avec les savans les plus recommandables : ils surent apprécier ses connaissances, et rendre à son extrême attachement pour ses amis, le témoignage de cette vertu austère qui faisait la base de son caractère.

Après avoir rempli les premiers emplois dans l'administration des finances au département de la guerre, après avoir été revêtu, pendant trois ans, des fonctions de commissaire de la trésorerie, qu'il n'a quittées que par suite d'une démission honorable à sa mémoire, *Lermina* est sorti de ces premiers emplois comme il y était entré, pauvre, mais pur; il regardait comme un véritable bonheur la place d'administrateur à l'École polytechnique, qui lui avait été confiée par ceux qui avaient coopéré à cette belle institution. C'était pour lui un asile après la tempête, et un moyen de se rattacher à ses goûts pour les sciences naturelles, en le plaçant dans le sanctuaire où, pendant le temps des orages révolutionnaires, on avait conservé le feu sacré; aussi a-t-il témoigné constamment sa reconnaissance par l'attachement le plus soutenu à ses devoirs, et par son dévouement sans bornes pour cet établissement.

Lermina laisse, en mourant, une famille qui avait besoin de son appui, et des amis qui le regrettent sincèrement.

SGANZIN et HACHETTE.

Cet article a été lu à la séance du Conseil d'instruction, le 14 mars 1806.

FIN.

Digitized by Google

TABLE

Des Articles contenus dans le XIII.e Cahier du Journal de l'École polytechnique.

Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable.

Génération de la surface. . . . . . .

Recherche de l'équation intégrale de la surface. . . . . . .

Recherche des équations aux différences partielles des 1.er, 2.e et 3.e ordres.

Second Mémoire sur la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure, par M. Gaspard Monge. . . . . Pag. 1—59.

Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences. . . . . . .

I.er Art. Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

II.e Art. Solutions particulières des équations aux différences du premier ordre.

III.e Art. Solutions particulières des équations différentielles, et des équations aux différences des ordres supérieurs au premier. . . . . . .

IV.e Art. Remarques sur les solutions particulières des équations différentielles relatives à des problèmes de dynamique. . . . . . .

V.e Art. Remarques sur les intégrales et sur les solutions particulières des équations aux différences partielles.

Addition au mémoire précédent, contenant de nouveaux développemens sur les remarques qui terminent l'art. I.er de ce mémoire, par M. Poisson. 60—125.

Mémoire sur les équations aux différences mêlées; solution de ce problème; trouver une courbe telle que le carré de la normale en un point quelconque, surpasse le carré de l'ordonnée perpendiculaire à l'axe des abscisses, élevée par le pied de cette perpendiculaire, d'une quantité constante, par M. Poisson. . . . . 126—147.

Digitized by Google

Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, *et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque, par M.* Ampère, *répétiteur d'analyse à l'École polytechnique*..... Pag. 148—181.

MÉCANIQUE. Sur la composition des momens et la composition des aires, par M. Poinsot, *professeur au Lycée* Bonaparte, *ancien élève de l'École polytechnique.*

Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes, par le même..... 182—241.

MÉMOIRE sur les axes de suspension synchrones, par M. Biot, *ancien élève de l'École polytechnique, et membre de l'Institut national.* 242—246.

Démonstration générale du principe des vîtesses virtuelles, dégagée de la considération des infinimens petits, par M. Ampère..... 247—269.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. Formules pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, et à un autre système de coordonnées rectangulaires.

Propriétés des surfaces du second degré, rapportées à leurs diamètres conjugués. Du contact des surfaces coniques pour les surfaces du second ordre, par M. Livet, *répétiteur à l'École polytechnique*..... 270—296.

Sur les surfaces courbes du second degré, par M. Brianchon, *élève de l'École polytechnique*..... 297—311.

CHIMIE. Sur les oxides et sur les sels de mercure, par MM. Fourcroy *et* Thenard..... 312—344.

Programme du cours des Mines fait à l'École polytechnique (l'année scolaire 1806), par M. Hassenfratz..... 345—371.

Annonce de la feuille publiée sous le titre de Correspondance sur l'École polytechnique, *à l'usage de cette école, par M.* Hachette. 372—375.

Nécrologie..... 376.

FIN de la Table du XIII.e Cahier.

Digitized by Google

ERRATA

Pour le Numéro XIII du Journal de l'École polytechnique.

MÉMOIRE DE M. MONGE.

Page 15, ligne 27, au lieu de *parcourra*, lisez *parcourt.*
P. 19, lig. 14, au lieu de *or*, lisez *ou.*
P. 35, lig. 11, au lieu de *arbitraire*, lisez *auxiliaire.*
P. 38, lig. 9, au lieu de $-\frac{dy}{dx}$, lisez $\frac{dy}{dx}$.
P. 42, lig. 8, au lieu de . *Or*, lisez *; ou.*

MÉMOIRE DE M. POISSON.

P. 63, lig. 24, au lieu de *troisième*, lisez *cinquième.*
P. 69, lig. 12, supprimez $= 0$.
P. 128, lig. 16, au lieu de *que donnent*, lisez *qui donnent.*
Idem, lig. 24, au lieu de $B\Delta^{n+1} + C\Delta^{n+2}$, lisez $B\Delta^{n+1}\zeta + C\Delta^{n+2}\zeta$.
P. 143, lig. 5, au lieu de p, lisez ψ.

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. MARCEL, Directeur général de l'Imprimerie impériale, Membre de la Légion d'honneur.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mémoire de M.r Ampère sur la Mécanique.

Fig. 1.

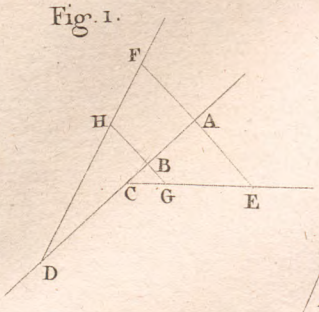


Fig. 2.

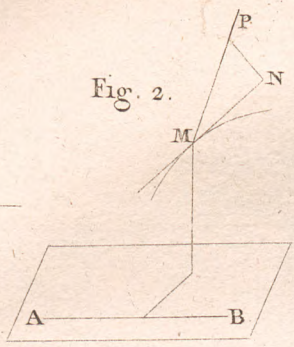
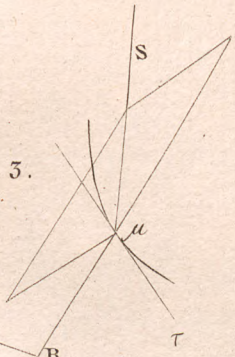


Fig. 3.



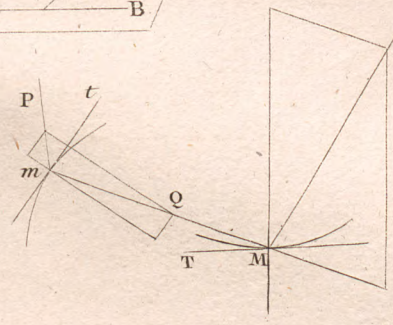
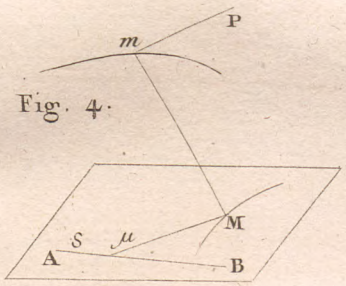


Fig. 4.



Mémoire de M.r Livet sur la Géométrie.

Fig. 1

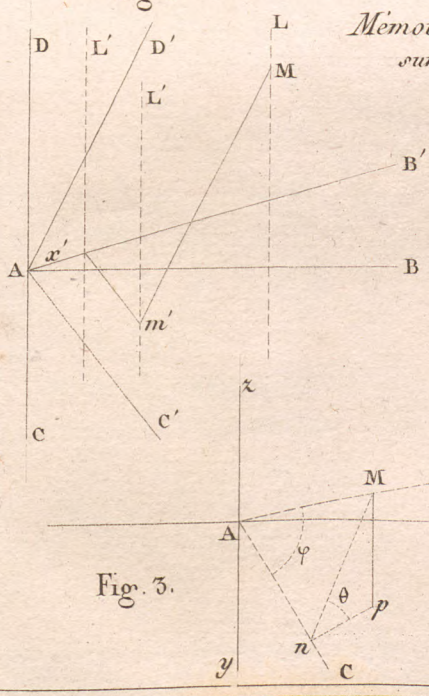
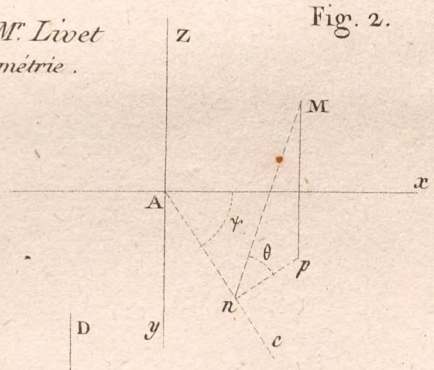


Fig. 3.

Fig. 2.



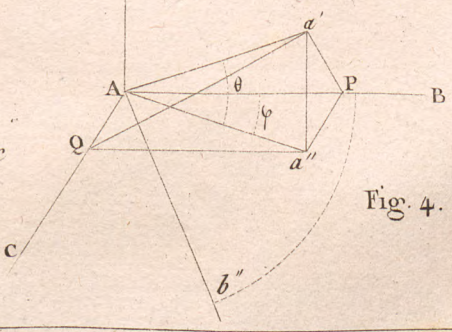


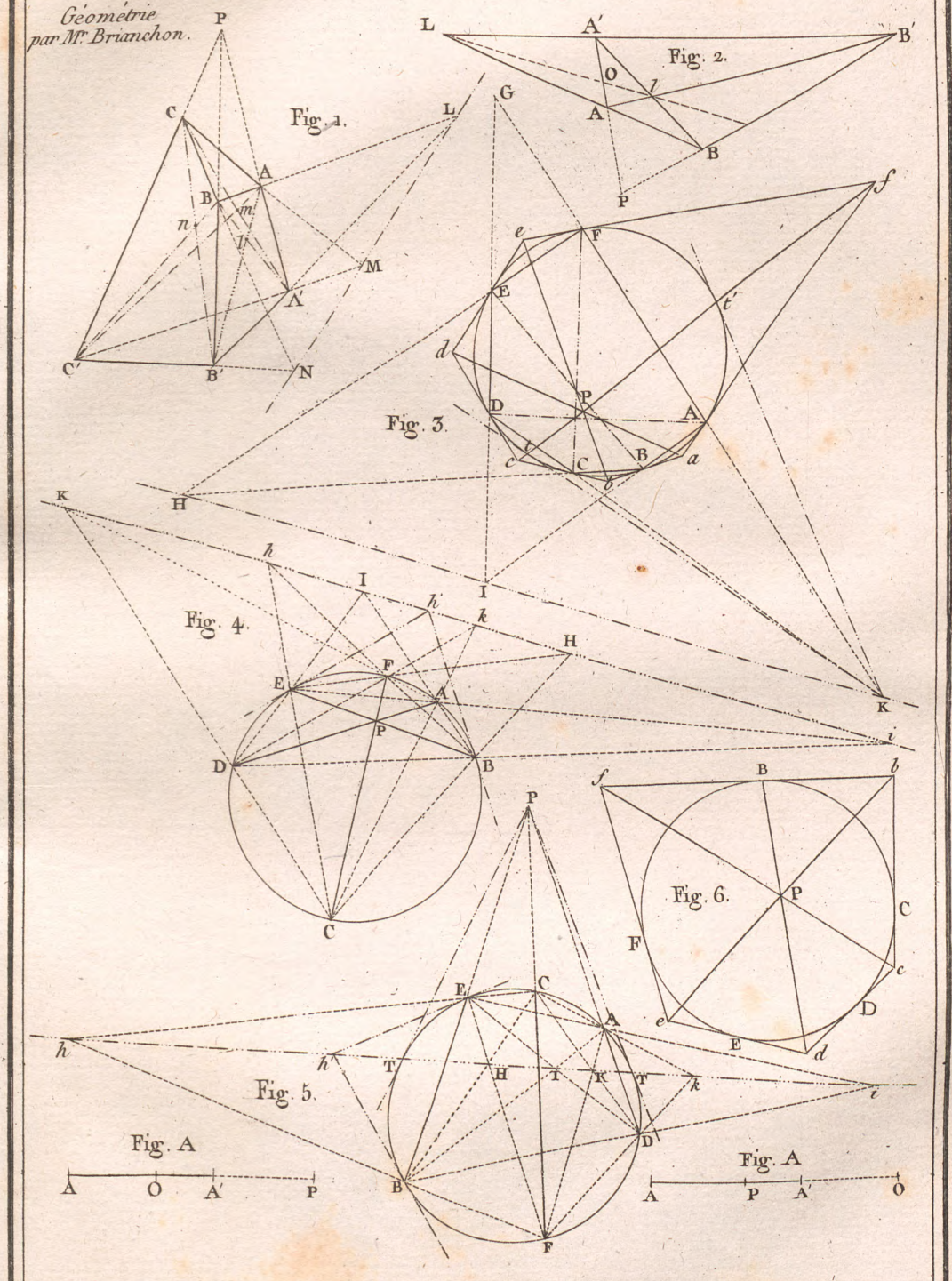
Fig. 4.

Digitized by Google

Digitized by Google

Mémoire sur les Surfaces du 2.e Dégré.

Géométrie par M.r Brianchon.



Digitized by Google

Digitized by Google